线性代数考研辅导讲义

吴天　葛霖

(中国科学技术大学　数学科学学院)

2021 年 3 月 9 日

前　言

这份讲义, 是为了辅导 2020 年数学学院考研同学的线性代数所编写, 将来也可能会在我当线性代数助教的时候拿来用作习题课讲义, 因此, 暂且取名为线性代数习题课讲义好了. 我们把它分成四个章节: 1. 矩阵与行列式: 包括矩阵与行列式的概念、性质、运算, 相抵标准型, 线性方程组等内容; 2. 线性空间与线性变换: 包括线性空间, 子空间, 商空间, 直和, 线性变换等内容; 3. 相似标准型: 包括多项式理论, Jordan 标准型, 根子空间, 多项式矩阵与 Smith 标准型, 有理标准型等内容; 4. 相合与二次型: 包括相合, Euclid 空间, 二次型, 解析几何等内容.

在内容编排方面, 本讲义主要以整理、总结知识点, 与提供一些例题示范为主, 在此之上适当做出扩展. 当然, 有些例题是非常困难的, 可能不仅需要大家在课上听, 还需要自己花功夫去演算. 这份讲义只会在每章结尾有一些问题, 它们的难度是比较大的, 它们没有答案, 但是我们在课上我讲一些, 希望大家能够每当闲暇的时候就思考一下, 久而久之, 会对思路的养成大有裨益. 而一些简单难度的习题都只被当作例题给出. 如果大家希望能够多一些题目来帮助自己得到很好的训练, 那么可以参考丘维声《高等代数》(第 2 版) 和李炯生《线性代数》(第 2 版).

中国首批十八博士之一的李尚志教授曾做一首诗, 其中蕴含了一些线性代数的学习道理, 现分享给大家, 希望能够对大家有所帮助:

代数几何熔一炉, 乾坤万物坐标书.
图形百态方程绘, 变换有规矩阵筹.
星移斗转落银河, 月印三潭伴碧波.
保短保长皆变换, 能伸能屈是几何.

感谢赵琦学姐撰写欧式空间与内积部分, 魏歆同学撰写正定、二次型部分, 张明月学妹撰写解析几何部分.

笔者水平所限, 如有谬误, 在所难免, 还望广大师生批评指正.

吴天 葛霖

2020 年 于中国科学技术大学

目　录

第 1 章　矩阵与行列式

§1.1　矩阵的定义与基本性质

设 F 是数域, $a_{ij} \in F$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, 称下面的 m 行 n 列的长方形表为数域 F 上的 $m \times n$ 矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

有时也简记为 $A = (a_{ij})_{m\times n}$. 其中, a_{ij} 被称作 A 的 (i,j) 元, a_{ii} 称为 A 的主对角元素. 通常, 我们习惯于用 E_{ij} 表示 (i,j) 元为 1, 其余元素为 0 的矩阵. 如果 $a_{ij} = 0, \forall i, j$, 则称 A 为零矩阵, 记作 $A = 0$; 如果 $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$, 称 A 为对角矩阵; 如果 $a_{ij} = 0, \forall i > j$, 称 A 为上三角矩阵; 如果 $a_{ij} = 0, \forall i \geqslant j$, 称 A 为严格上三角矩阵. 类似可以定义下三角矩阵和严格下三角矩阵. 如果 $F = \mathbb{R}$, 称 A 为实矩阵; $F = \mathbb{C}$, 称 A 为复矩阵. 在后面的叙述中, 没有特殊指明的情况下, 总是默认 F 为一个代数闭域. 我们把 F 上的 $m \times n$ 矩阵全体组成的集合记作 $F^{m\times n}$. 特别地, 在 $m = n$ 时, 称 A 为 n 阶方阵.

考虑 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in F^{m\times n}$, $\lambda \in F$, 定义 $A + B := (a_{ij} + b_{ij})$, $\lambda A := (\lambda a_{ij})$. 因此, 在定义负矩阵 $-A = -1_F A$ 以后, 我们就有了加减法、数乘的概念, 并且它们显然继承了 F 上的加法交换律、结合律; 数乘交换律、结合律; 加法和数乘共同具有分配律.

考虑 $A = (a_{ij}) \in F^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in F^{n\times p}$, 定义矩阵乘法 $AB := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right) \in F^{m\times p}$. 显然, 乘法与数乘之间具有交换律, 乘法与加法之间具有分配律: $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$. 特别地, 在 $m = n = p$ 的时候, $AB \in F^{n\times n}$, 这样, 我们有机会研究方阵的交换律和结合律. 结论留作练习:

例题 1.1.1 *方阵乘法具有结合律*: $(AB)C = A(BC)$, $A, B, C \in F^{n\times n}$, *但是并没有交换律*.

定义 $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶单位阵, 容易验证它是矩阵乘法的幺元. 通过上述讨论, 我们得到: $(F^{n\times n}, +, \cdot)$ 是含幺非交换环, 其中 $\cdot$ 表示矩阵乘法. 设 $A \in F^{n\times n}$. 定义 A 的 k 次幂 A^k 为 n 个 A 相乘, 这样就可以继续定义 A 的多项式. 如果存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $A^k = 0$, 称 A 为幂零矩阵, 更进一步, 若 $k \geqslant 2$ 且 $A^{k-1} \neq 0$, 称 A 为 k 次幂零矩阵. 我们把零矩阵看作一次幂零矩阵. 定义方阵的 Lie 括号运算: $[A, B] := AB - BA$, 如果 $[A, B] = 0$, 称 A 和 B 可交换. 请尝试证明如下结论:

例题 1.1.2 $F^{n\times n}$ *中与任何方阵都可交换的方阵全体是所有纯量阵* (*能够写成单位阵的若干倍*), *即* $F^{n\times n}$ *的中心化子* $Z(F^{n\times n}) = \{\lambda I_n : \lambda \in F\}$.

下面通过若干具体例子的计算, 巩固刚刚介绍的概念.

例题 1.1.3 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2020}$.

提示 注意到 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, 并使用乘法结合律.

在你对于一些幂次计算一筹莫展的时候, 尝试计算几项, 观察规律, 配合上归纳法是一种好选择.

例题 1.1.4 计算 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2020}$.

例题 1.1.5 计算 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}^{n}$.

例题 1.1.6 证明: 方阵 A 与 B 可交换时, Newton 二项式成立: $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

对于方阵 $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$, 还可以定义 A 的迹 $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. 它显然是保持加法和数乘的, 换句话说, 它是 $F^{n\times n}$ 上面的一个线性函数. 下面的性质十分重要, 证明留作练习:

例题 1.1.7 设 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times m}$. 证明: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

回到 $A \in F^{m\times n}$ 的情况, 定义 A 的转置 $A^T = (a_{ji}) \in F^{n\times m}$. 容易验证, 转置运算是保持加法、数乘的, 而对于乘法具有"穿脱原理": $(AB)^T = B^T A^T$. 此外, 两次转置显然相当于不动. 若 $A^T = A$, 称 A 是对称矩阵; 若 $A^T = -A$, 称 A 是反对称矩阵. 显然, 只有方阵有机会成为上述两类矩阵. 不仅如此, 不管 A 是否为方阵, AA^T 总是对称方阵. 如果 $F = \mathbb{C}$, 还可以定义 A 的共轭 $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$. 显然, 共轭运算保持加法、数乘、乘法. 不难验证的是, 转置与共轭运算可交换: $\overline{A^T} = \overline{A}^T$, 我们通常称它为 A 的 Hermite 元: $A^H := \overline{A}^T$. 称复方阵 A 是 Hermite 方阵, 如果 $A^H = A$; 称复方阵 A 是反 Hermite 方阵, 如果 $A^H = -A$. 显然, AA^H 总是 Hermite 的.

例题 1.1.8 证明: 任何方阵都可以唯一分解为对称矩阵与反对称矩阵之和.

提示 当 A 是方阵时, $A + A^T$ 总是对称的.

例题 1.1.9 证明: 实对称的二次幂零矩阵一定是零矩阵. 把二次幂零的条件去掉, 结论是否依旧成立?

提示 后者的确是成立的, 不过只使用这节的知识很难证明, 在学完实对称矩阵的相似对角化之后再做比较好.

矩阵的分块, 是处理问题的一个重要技巧. 所谓分块, 相当于把一个矩阵划分为若干个小矩形, 每个矩形内都是小矩阵, 进而把它们当作元素来进行处理. 容易看出, 恰当地分块在处理实际问题中会有极大的帮助. 称 A 为准上三角矩阵, 如果它在某种分块下能够写上三角的形式, 同理可以定义准严格上三角矩阵、严格下三角矩阵、准严格下三角矩阵、准对角阵. 通常我们把准对角阵的对角分块简记为 $A = \operatorname{diag}(A_1, \cdots, A_k)$.

例题 1.1.10 设 $A, X \in F^{n\times n}$, 考虑 X 的列向量分块 $X = (X_1, \cdots, X_n)$, 满足 $AX_i = \lambda_i X_i$, $\lambda_i \in F$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. 求矩阵 B, 满足 $AX = XB$.

§1.2 行列式的定义与基本性质

称 $(j_1 \cdots j_n)$ 为 n 元排列, 如果 $\{j_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} = \{i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$. n 元排列的全体记为 S_n, 显然 $|S_n| = n!$. 称排列 $(j_1 \cdots j_n)$ 的逆序数为满足 $p < q$ 且 $j_p > j_q$ 的 (p, q) 的个数, 记作 $\tau(j_1 \cdots j_n)$. 如果排列的逆序数为奇数, 称之为奇排列, 否则为偶排列. 如果只交换排列中的两个数, 称做了一次对换. 容易验证, 对换必定会改变排列的奇偶性. 通过对换的概念, 结合上述逆序数的定义, 我们可以证明任何排列通过对换, 变为 $(12 \cdots n)$ 的对换次数不是固定的, 但是对换次数奇偶性是固定的, 且与排列的奇偶性相同. 因此, 定义排列的符号 $\operatorname{sgn}(j_1 \cdots j_n) = (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)}$.

有了这些准备工作, 我们定义 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 \cdots j_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(j_1 \cdots j_n) \prod_{k=1}^{n} a_{k j_k}.$$

结合排列的性质, 以及上述定义, 我们能够得到行列式的按第 i 行 (列也是可以的) 展开: $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$, 其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 被称作 a_{ij} 的代数余子式. 将此展开式推广到更一般的情况: 定义 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ 为 A 的第 $i_1, \cdots, i_r$ 行和第 $j_1, \cdots, j_r$ 列的交叉元按照原来的顺序排列而成的 r 阶方阵的行列式 (这被称作 A 的一个 r 阶子式). 我们有 Laplace 展开定理:

$$|A| = \sum_{1 \leqslant k_1 < \cdots k_r \leqslant n} (-1)^{\sum\limits_{l=1}^{r} (k_l + i_l)} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \cdots & i_n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

其中 $(i_1 \cdots i_n)$ 和 $(k_1 \cdots k_n)$ 都是 n 元排列.

由上立刻推知几条常见的性质: 上 (下) 三角方阵的行列式一定是对角元之积; 准上 (下) 三角方阵的行列式也一定是对角块的行列式之积; 如果某行 (列) 元素均为 0, 则行列式一定为 0; $|A| = |A^T|$; 某一行 (列) 如果拆成了两个行 (列) 向量之和, 那么行列式的结果也一定等于该行 (列) 分别替换为两个行 (列) 向量得到的行列式之和; 某一行 (列) 向量如果数乘上一个数, 那么行列式的结果也会乘以该数, 特别地, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$; 交换行列式的两行 (列), 行列式会变为相反数; 行列式的某一行 (列) 的若干倍加到另一行 (列), 不改变行列式的值.

那么矩阵乘法与行列式是否兼容呢? 答案是对的, 这就是 Binet-Cauchy 定理: 设 $A \in F^{n \times m}$, $B \in F^{m \times n}$. 如果 $n > m$, 则 $|AB| = 0$; 如果 $n = m$, 则 $|AB| = |A||B|$; 如果 $n < m$, 则

$$|AB| = \sum_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_n \leqslant m} A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ k_1 & \cdots & k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

如何更好地辅助记忆 Binet-Cauchy 定理呢? 当 $n > m$ 时, AB 比 A 和 B 的尺寸都要大, 看起来像是被稀释了一样, 进而 $|AB| = 0$; 而 $n < m$ 时, AB 比 A 和 B 的尺寸都要小, 看起来被浓缩了, 进而 $|AB|$ 不一定为

0; $n=m$ 时, $|AB|=|A||B|$ 很自然, 这说明 det 是方阵乘法的同态.

上面提到的性质有的可以很容易地使用上述讨论直接证明, 有的可能在之后学习完初等矩阵、矩阵的秩之后才会理解地更透彻一些. 以上所有性质的证明在任何一本合格的线性代数教材上都能找到, 此处省略. 值得一提的是, 行列式有一个更加抽象的定义: n 维线性空间 F^n 上的规范反对称 n 重线性函数. 它与我们的定义是完全等价的, 感兴趣的同学可以参考李炯生《线性代数》的 2.1、2.2 节.

例题 1.2.1 写出行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 2 & 3 & x & 1 \\ x & 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ 中含 x^4 和 x^3 的项.

提示 这道题考验你是否真正理解了行列式的定义.

例题 1.2.2 设 $a_{ij}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, $\forall 1 \leqslant i,j \leqslant n$, $A(x)=|a_{ij}(x)|_{n\times n}$, 记 $A_i(x)$ 为 $A(x)$ 的第 i 行求导, 其余不变组成的行列式. 证明: $A'(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x)$.

提示 按行展开, 再利用归纳法应该是可以的.

例题 1.2.3 n 元排列 $(n,(n-1),\cdots 3,2,1)$ 是奇排列还是偶排列?

例题 1.2.4 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

很多时候, 所有行 (列) 的元素之和相同是一个很好利用的条件.

例题 1.2.5 证明: $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

例题 1.2.6 证明: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = \dfrac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^{n-2}$.

还有些时候, 需要利用行列式的特点, 把尽可能多的位置变为 0(打洞), 方便进一步地计算.

例题 1.2.7 证明: $\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_n & & & a_n \end{vmatrix} = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k - \sum\limits_{j=2}^{n} b_j c_j \prod\limits_{k\neq 1,j} a_k$.

例题 1.2.8 证明: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 3 & \cdots & n-1 & 3 \\ 3 & 3 & \cdots & 3 & n \end{vmatrix} = \begin{cases} -7, & n=2, \\ 6(n-3)!, & n \geqslant 3. \end{cases}$

有些问题可以使用归纳法, 尝试递归或求处关于阶数的递推式. 注意到行列式的本质是多项式, 一定是连续的, 因此在求含参数的行列式时, 参数的某些特殊情况是无需特别考察的, 只需用连续性取极限即可.

例题 1.2.9 证明: $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \begin{cases} n+1, & \theta=0, \\ \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, & \theta \neq 0. \end{cases}$

例题 1.2.10 证明 **Vandermonde** 行列式: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$

例题 1.2.11 证明友矩阵的行列式: $\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}$.

不要忘记, Laplace 展开也是很好用的方法, 尤其是针对稀疏矩阵 (0 的个数很多的矩阵).

例题 1.2.12 证明: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC$, 其中 A, B, C, D 依次是由 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$ 删掉第 $1,2,3,4$ 列得到的三阶行列式.

例题 1.2.13 设 $A = (a_{ij})$, a_{ij} 对应的代数余子式为 A_{ij}, 证明: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} \det A$.

下面看一些综合性的题目.

例题 1.2.14 证明: $\begin{vmatrix} c_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & c_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & c_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & c_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(c_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{i \neq j}(c_i - a_i)$.

提示 与我们按行 (列) 展开相反, 加行 (列) 在某些题目中会收到奇效.

例题 1.2.15 证明: 奇数阶反对称矩阵的行列式为 0; 偶数阶反对称矩阵的所有元的代数余子式之和为 0.

例题 1.2.16 证明: $\Delta_n = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix} = \left(x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \prod_{k=1}^{n-1} (x - a_k)$.

提示 把它看作关于 x 的多项式, 你是否能尝试找出所有的根呢?

行列式的计算题目纷繁复杂, 上面只能介绍基本的一些方法, 如何能够更加熟练, 还要靠自己多下功夫.

§1.3 可逆矩阵与初等变换

我们把方阵 $A \in F^{n\times n}$ 的逆矩阵记作 A^{-1}, 满足 $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$. 此时, 我们称 A 是可逆矩阵. 这样的话, 我们就可以理解前面所讲的 $F^{n\times n}$ 是一个含幺环的原因了. 记 $\mathrm{GL}_n(F)$ 为 F 上所有 n 阶可逆矩阵全体, 那么它是 $F^{n\times n}$ 的单位群. 由于群中元素的逆是唯一的, 因此逆矩阵如果存在总是唯一的, 并且逆矩阵的逆矩阵是本身. 矩阵的逆是保持数乘的: $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$; 矩阵的逆也有穿脱原理: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 矩阵的逆和共轭、转置都是可交换的.

例题 1.3.1 已知 A 是方阵, $A^k = 0$. 证明: $\left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{A^j}{j!}\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j A^j}{j!}$.

提示 可以直接计算验证. 不过想想, 为什么是这种形式呢? 你是否能联想到某个函数的 **Taylor** 级数? 那么矩阵是否可以定义指数函数呢? 这些我们后面会讨论.

那么, 如何具体地计算逆矩阵呢? 定义 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & a_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 容易发现: $AA^* = A^*A = |A|I_n$, 因此 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$. 直接利用伴随矩阵的构造, 我们能够证明: A 可逆当且仅当 $|A| \neq 0$. 不仅如此, 结合逆矩阵的定义和例题 1.2.13, 我们还可以得到著名的 Cramer 法则: 设 $A \in \mathrm{GL}_n(F)$, $b \in F^{n\times 1}$, 则线性方程组 $Ax = b$ 存在唯一解 $x = A^{-1}b$, 满足 x 的第 k 个分量为 $\frac{\delta_k}{\delta}$, 其中 $\delta = |A|$, δ_k 为把 A 的第 k 列换成 b 的矩阵的行列式. 这个法则直观地给出了如何求解满秩方程组的算法, 从数值的角度来看, 它的运算复杂度为 $O(n!)$, 这显然是不可接受的, 但是它具有深刻的理论意义.

例题 1.3.2 验证伴随矩阵的几条性质: (1) $(\lambda A)^* = \lambda^{n-1}A^*$; (2) $(AB)^* = B^*A^*$; (3) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

称以下三种操作为对矩阵的初等行变换: (1) 交换第 i, j 行; (2) 把第 j 行的 λ 倍加到第 i 行; (3) 第 i 行乘以非零的 λ 倍. 易知, 上述情况分别相当于把下述矩阵乘到被操作矩阵的左侧: (1) $P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, (2) $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$, (3) $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1_F)E_{ii}$. 这些矩阵被称为初等矩阵. 通过转置可知, 初等列变换是相当于矩阵右侧乘以对应的初等矩阵, 这个规律被称为"行左列右".

之所以定义初等变换的概念, 是因为这些变换正好对应我们求解线性方程组的必要操作: (1) 调整方程、变量位置; (2) 加减消元; (3) 乘以倍数. 这也是研究矩阵理论的重要原因之一. 而通过求解方程组的过程, 以及初等行 (列) 变换等价于在左 (右) 侧乘初等矩阵的结论, 我们能够总结出李炯生 118 页例 1 求逆矩阵的方法. 如

果把其中右侧的单位矩阵替换为一般矩阵, 做类似操作之后, 可以直接求解矩阵方程 $AX = B$.

我们尝试研究分块矩阵的初等变换. 给出几道例题:

例题 1.3.3 (Schur 公式) 设 $A \in \mathrm{GL}_m(F)$, $B \in F^{m\times n}$, $C \in F^{n\times m}$, $D \in F^{n\times n}$. 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

例题 1.3.4 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 证明: $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + \mathrm{i}B||A - \mathrm{i}B|$.

李炯生 118 页例 1 建议大家仔细阅读, 从中不难发现: 任何可逆矩阵可以表示为有限个初等矩阵乘积. 对于一般的矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 我们允许你同时使用行、列初等变换, 在有限次操作之后, 总可以将 A 变换为 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的形状. 定义 $r = \operatorname{rank} A$ 为矩阵 A 的秩, 矩阵 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 A 的相抵标准型. 这里要解释一下所谓的相抵: 设 $A, B \in F^{m\times n}$, 称 A 与 B 相抵, 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_m(F)$, $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$, 使得 $B = PAQ$.

所谓相抵标准型, 指的是所有的矩阵都可以唯一相抵与 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 型矩阵, 换句话说, 相抵是一个等价关系, 它按照秩, 把所有矩阵分成了若干等价类, 同一等价类中的所有矩阵之间两两相抵. 因此, 两个矩阵相抵, 当且仅当二者形状一样且秩相等. 在第三章, 大家还会接触到相似标准型的概念. 请尝试证明如下几条秩的性质:

例题 1.3.5 矩阵的秩正好是它的所有非零子式的最高阶数.

例题 1.3.6 $A \in F^{m\times n}$, 证明: $\operatorname{rank} A \leqslant \min\{m, n\}$. 特别地, 不等式取等时, 我们称 A 是满秩的.

例题 1.3.7 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$, 证明: $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank} A$. 取等一定说明 B 满秩吗?

例题 1.3.8 证明: $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} \geqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$. 特别地, 当 $C = 0$ 时, 不等式取等.

例题 1.3.9 证明: $\operatorname{rank}(A, B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

例题 1.3.10 设 $A \in F^{n\times n}$, 证明: **(1)** 如果 A 满秩, 则 A^* 满秩; **(2)** 如果 $\operatorname{rank} A = n-1$, 则 $\operatorname{rank} A^* = 1$; (3) 如果 $\operatorname{rank} A \leqslant n-2$, 则 $A^* = 0$.

例题 1.3.11 设 $A \in F^{m\times n}$, $\operatorname{rank} A = r$. 证明: 存在两个满秩矩阵 $P \in F^{m\times r}$, $Q \in F^{r\times n}$, 使得 $A = PQ$.

上述例题的证明只要使用秩的概念、初等变换即可, 留给大家作为练习. 例题 1.3.11 是满秩分解定理. 下面介绍著名的 Frobenius 秩不等式: 设 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$, $C \in F^{p\times q}$, 则

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC - \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank} ABC.$$

大家可以尝试自己想一想证明方法, 如果未能成功, 请参考李炯生 130 页. 令 $B = I_n$, 得到 Sylvester 秩不等式:

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} C - n \leqslant \operatorname{rank} AC.$$

上述两个秩不等式在一些秩不等式的证明题中会有巧妙的运用, 此处不再赘述. 秩不等式的证明, 也需要大家花功夫做一些题目, 来巩固提升自己对于秩的性质的运用能力.

在本节的最后, 我们讨论一个重要的行列式恒等式, 它是使用分块矩阵的初等变换证明的.

例题 1.3.12 设 $A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times m}$, $\lambda \in F$. 证明: $\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA)$.

提示 仿照 Schur 公式的证明, 对 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$ 进行两种方式初等变换.

例题 1.3.12 的结论如果灵活运用, 在一些行列式的计算中会有简便许多.

例题 1.3.13 证明: $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 1+\sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$

§1.4 矩阵与方程组

我们从矩阵的角度来重新思考线性方程组的求解问题. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为系数矩阵, $x\in F^{n\times 1}$ 为解向量, $b\in F^{m\times 1}$ 为非齐次项, 即 $Ax=b$. 在研究这个之前, 我们先研究齐次方程组 $Ax=0$:

例题 1.4.1 设 $\operatorname{rank} A=r$, 如果 $r=n$ 时, $Ax=0$ 只有零解; $r<n$ 时, 它有非零解, 且通解依赖于 $n-r$ 个独立常数 (也就是所谓的解空间维数为 $n-r$).

我们在求解方程组的时候, 会发现可能有些方程会被其他的方程给"替代", 也就是它们能够被其他方程推导出来. 使用初等变换的语言来讲, 就是通过对系数矩阵作初等行变换, 能够将一些行向量变为零向量, 这些行对应的方程就是能被"替代"的方程. 理解了这个之后, 我们能够更好地理解矩阵秩的意义了: 所谓矩阵的秩, 刻画的是矩阵的行 (列) 向量之间能够被"替代"的程度, 把所有能被替代的行 (列) 向量拿掉之后, 剩余的行 (列) 数就是矩阵的秩. 那么既然 A 中有 r 行无法被替代, 那么它们作为系数矩阵, 得到的齐次方程组的解自然就会被 r 个式子所决定. 而 n 个未知元有 n 个自由度, 被 r 个式子确定后自然就只剩下了 $n-r$ 个自由度了, 这样就解释了这个定理的由来. 由这些观点, 我们分别讨论非齐次方程解的存在性和结构定理:

例题 1.4.2 $Ax=b$ 存在解的充要条件是 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}(A,b)$.

例题 1.4.3 设 $Ax=b$ 存在解, $\operatorname{rank} A=r$. 当 $r=n$ 时, 解存在唯一; 当 $r<n$ 时, 通解具有 $n-r$ 个独立常数, 且通解由对应齐次方程组的通解和非齐次方程组的特解叠加而成.

上述给出的是方程组解的存在性以及结构理论, 如何来求解方程组? 实际上, 1.3 节我们已经给出了答案, 当时让大家阅读李炯生 118 页例 1, 它相当于针对矩阵方程 $AX=I_n$, 对 (A,I_n) 进行行变换的操作, 在 A 变为 I_n 的时候, 右侧的 I_n 就变为了 A^{-1}. 如果我们把右侧的 I_n 换为其他形状的矩阵, 甚至比如一个列向量, 仿照类似的做法, 我们就能得到使用初等行变换求解线性方程组的方法, 详情请参考李炯生 140 页例 1.

例题 1.4.2 的结论可以推广到一般的矩阵方程中:

例题 1.4.4 设 $X\in F^{n\times p}$, $B\in F^{m\times p}$. 则 $AX=B$ 存在解的充要条件是 $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank}(A,B)$.

针对方阵, 我们还有一个常用的推论:

例题 1.4.5 设 $A\in F^{n\times n}$, $X\in F^{n\times p}$, 则矩阵方程 $AX=0$ 有非零解, 当且仅当 $\det A=0$.

想要理解好上述结论, 除了学会推导证明, 还要计算几个具体的例子. 这些例子不难在李炯生、李尚志或者丘维声的书上找到, 不在多, 在覆盖面全, 要尽可能找出适合各种情况的例子. 在把它们挨个验证一遍, 计算出它们的通解之后, 与定理中描述的结果相比较, 这对于这块的学习大有益处.

在本章最后, 我们给出一道利用结构定理解答的题目, 这有助于大家体会结构定理的妙用.

例题 1.4.6 设四元线性方程组的系数矩阵 A 的秩为 3, $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$ 是方程组的三个解, 其中 $\alpha_1=(1,-2,-3,4)^T$, $5\alpha_2-2\alpha_3=(2,0,0,8)^T$. 求线性方程组的通解.

提示 $5\alpha_2-2\alpha_3-3\alpha_1$ 是齐次方程组的通解. 参考答案: $(1,-2,-3,4)^T+t(-1,6,9,-4)^T$.

第 2 章　线性空间与线性变换

§2.1　线性空间

设 V 是一个非空集合, V 的元素称为向量, F 是一个数域, F 上的元素称为数. 再 V 上定义了加法运算 $\alpha+\beta\in V$ 和数乘运算 $\lambda\alpha\in V$, 其中 $\alpha,\beta\in V,\lambda\in F$. 若这两种运算满足如下运算律:

$(A1)$ 加法交换律　$\forall\alpha,\beta\in V,\alpha+\beta=\beta+\alpha$

$(A2)$ 加法结合律　$\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

$(A3)$ 加法有幺元　$\exists 0\in V,\forall\alpha\in V,0+\alpha=\alpha$

$(A4)$ 加法有逆元　$\forall\alpha\in V,\exists\beta\in V,\alpha+\beta=0$

$(M1)$ 数乘结合律　$\forall\alpha\in V,\forall\lambda,\mu\in F,\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$

$(M2)$ 数乘有幺元　$\forall\alpha\in V,1\alpha=\alpha$

$(D1)$ 数乘对数的分配律　$\forall\alpha\in V,\forall\lambda,\mu\in F,(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$

$(D2)$ 数乘对向量的分配律　$\forall\alpha,\beta\in V,\forall\lambda\in F,\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$

则称代数结构 $(V,F,+,\cdot)$ 为线性空间, 简称 V 是 F 上的线性空间.

取定一个数域 K, 设 n 是任意给定的一个正整数. 令 $K^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in K,i=1,2,\cdots,n\}$. 我们称 K^n 中两个元素: $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 相等, 当且仅当 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_n=b_n$. 则显然, K^n 是 K 上的线性空间.

对于给定的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 任给 K 中一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 就可以得到一个向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$, 称这个向量是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个线性组合, 其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为系数.

在 K^n 中, 给定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$, 对于 $\beta\in K^n$, 如果存在 K 中一组数 $c_1,c_2,\cdots,c_s$, 使得 $\beta=\sum\limits_{j=1}^{s}c_j\alpha_j$, 那么称 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出. 数域 K

性质 2.1: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 那么 V 的零元素是唯一的.

性质 2.2: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 v 是线性空间 V 中的任意给定的一个元素, 那么 v 的逆元是唯一的.

性质 2.3: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 v 是线性空间 V 中的任意给定的一个元素, 那么有

$$0\cdot v=\mathbf{0},\qquad k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0},\qquad (-1)\cdot v=-v,\qquad \forall k\in K,v\in V$$

成立.

性质 2.4: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 v 是线性空间 V 中的任意给定的一个元素, 且 $k\in K$, 并且假设

$$k\cdot v=\mathbf{0}$$

成立, 则有

$$k = 0, or\ v = \mathbf{0}$$

一个向量组 $\{a_j\}_{j=1}^r$ 中的每一个向量都可以被另一个向量组 $\{b_k\}_{k=1}^s$ 线性表出, 则称向量组 $\{a_j\}_{j=1}^r$ 可以被向量组 $\{b_k\}_{k=1}^s$ 线性表出.

性质 2.5: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 v 是线性空间 V 中的任意给定的一个元素, 那么向量 v 线性相关的充要条件是 $v = \mathbf{0}$

性质 2.6: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 是线性空间 V 中的任意给定的一个向量组, 那么向量组 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 线性相关的充要条件是存在一个向量 $v_s, 1 \leqslant s \leqslant r$, 使得

$$v_s = \sum_{j=1}^{s-1} k_j \cdot v_j + \sum_{j=s+1}^{r} k_j \cdot v_j, \quad k_j \in K$$

成立.

性质 2.7: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 是线性空间 V 中的任意给定的一个向量组, 如果 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 线性无关, 且能被 $\{u_j\}_{j=1}^s$ 线性表出, 那么不等式 $r \leqslant s$ 成立.

性质 2.8: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 $\{v_j\}_{j=1}^r, \{u_j\}_{j=1}^s$ 是线性空间 V 中的任意给定的两个向量组, 如果这两个向量组都是线性无关的. 且能相互被对方线性表出 (即这两个向量组是等价的), 那么 $s = r$ 成立.

性质 2.9: 如果 V 是数域 K 上的线性空间, 而 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 是线性空间 V 中的任意给定的一个向量组, $u \in V$, 如果 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 线性无关, 但向量组 $\{v_j\}_{j=1}^r \cup \{u\}$ 线性相关, 那么 u 可以被向量组 $\{v_j\}_{j=1}^r$ 线性表出, 且表示方法唯一.

如果数域 K 上的线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\{b_j\}_{j=1}^n$, 但是没有更多数量的线性无关的向量, 那么 V 就被称为 n 维的, 且称 $\{b_j\}_{j=1}^n$ 为 V 的一组基, 设 $v \in V$, 于是向量组 $\{b_j\}_{j=1}^n \cup \{v\}$ 线性相关, 因此向量 v 可以被基 $\{b_j\}_{j=1}^n$ 线性表出, 形如 $v = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j$, $a_j \in K$; 如果在数域 K 上的线性空间 V 中可以找到任意多个线性无关的向量, 那么称 V 是无限维的.

$\{a_j\}_{j=1}^n$ 是被 v 和基 $\{b_j\}_{j=1}^n$ 唯一确定的, 这组数就称为 v 在基 $\{b_j\}_{j=1}^n$ 下的坐标.

性质 2.10: 如果数域 K 上的线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\{b_j\}_{j=1}^n$, 且 V 中任意一个向量都可以用它们线性表出, 那么 V 是 n 维的, 且向量组 $\{b_j\}_{j=1}^n$ 就是线性空间 V 的一组基.

例题 2.1.0 : 令 $Q(\omega) := \{a + b\omega \mid a, b \in Q\}, \omega^2 + \omega + 1 = 0$

(1) 证明它对于通常的加法和复数域乘法构成 $\mathbb{Q}$-线性空间;

(2) 求它的一组基;

(3)$\bar{\omega}, -\sqrt{3}i$ 是否在其中? 并求 $\omega, \bar{\omega}, -\sqrt{3}i$ 的秩.

例题 2.1.1 : 在 K^4 中, 设 $\alpha_1 = (1,1,1,1)^T, \alpha_2 = (1,1,1,0)^T, \alpha_3 = (1,1,0,0)^T, \alpha_4 = (1,0,0,0)^T, \alpha = (2,-1,3,4)^T$, 求 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 下的坐标.

例题 2.1.2 : 设 V 是由复数组成的无穷数列 $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 的全体组成的集合, 定义 V 中任意两个数列的加法 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ 以及数乘 $\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$ 之后成为成为复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

(1) 求证: V 中满足条件 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 的全体数列组成的 V 的子空间 W.W 的维数是多少?

(2) 对任意 $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$, 定义 $\sigma(a_1, a_2) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \in W$. 求证 σ 是 $\mathbb{C}^2$ 到 W 的同构映射.

(3) 求证: W 在存在一组由等比数列组成的基 M.

(4) 设数列 $\{F_n\}$ 满足条件 $F_1=1, F_2=1$ 且 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, 求 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标, 并由此求出 $\{F_n\}$ 的通项公式.

例题 2.1.3 : 设 $\mathbb{R}^+$ 是所有的正实数组成的集合, 对任意 $a, b\in\mathbb{R}^+$, 定义 $a\oplus b=ab$, 对任意 $a\in\mathbb{R}^+$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$ 定义 $\lambda\otimes a=a^\lambda$

(1) 验证 $\mathbb{R}^+$ 按上述定义的加法和数乘构成一个线性空间.

(2) 证明 $\mathbb{R}^+$ 与 $\mathbb{R}$ 这两个线性空间同构, 并求出所有同构.

例题 2.1.4 : 判断几何空间 $R^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ 对于通常的向量加法和如下定义的数乘运算:

$$\lambda\otimes(x,y)=(\lambda x,y),\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\lambda\in\mathbb{R}$$

是否构成实数域上的线性空间? 为什么?

例题 2.1.5 : 设非空集合 $V=\{(a+ib,c+id)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ 对于通常的加法和数乘在复数域 $\mathbb{C}$ 和实数域 $\mathbb{R}$ 上构成的线性空间分别为 V_{C} 和 V_{B}, 试求 $\dim\left(V_{\mathrm{C}}\right), \dim\left(V_{\mathrm{R}}\right)$.

例题 2.1.6 : 设 V_1, V_2 是数域 K 上的线性空间, 记

$$V_1\times V_2=\{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\mid \alpha_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2\}$$

对任意 $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)\in V_1\times V_2$, 及任意 $k\in K$, 规定 $k(\alpha_1,\alpha_2)=(k\alpha_1,k\alpha_2)$ **(1)** 证明 : $V_1\times V_2$ 关于以上运算构成数域 K 上的线性空间 ; **(2)** 已知 $\dim V_1=m, \dim V_2=n$, 求 $\dim\left(V_1\times V_2\right)$

例题 2.1.7 : 设 V 是数域 K 上的线性空间 , $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 V 中的线性无关向量组, 求由向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 生成的线性子空间 W 的一个基以及 W 的维数.

例题 2.1.8 : 设 V 为数域 K 上的有限维线性空间, 且 V 只有平凡子空间. 问 V 的维数是多少?

例题 2.1.9 : 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 K^n 中的两个线性无关向量组, 证明: 子空间

$$L\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)\cap L\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)$$

的维数等于齐次线性方程组

$$x_1\alpha_{1.}+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r+y_1\beta_1+y_2\beta_2+\cdots+\gamma_2\beta_s=0$$

的解空间的维数.

§2.2 子空间与直和与商空间

设 U 是数域 K 上的线性空间 V 的非空向量集合. 如果 U 对于线性空间 V 的向量加法和纯量与向量的乘法是封闭的, 即对任意 $\alpha,\beta\in U,\alpha+\beta\in U$, 并且对任意 $\lambda\in F,\alpha\in U,\lambda\alpha\in U$, 则称 U 为域 K 上的线性空间 V 的子空间.

$\{0\}$ 和 V 是线性空间 V 的两个平凡子空间, 其它 V 的子空间称为 V 的真子空间.

设 I 是下标集合, $\{V_\nu:\nu\in I\}$ 是数域 K 上线性空间 V 的子空间集合. V 中所有属于每个子空间 $V_\nu,\nu\in I$ 的向量的集合称为所有子空间 $V_\nu,\nu\in I$ 的交, 记为 $\bigcap\limits_{\nu\in I}V_\nu$

性质 2.11: 数域 K 上线性空间 V 的非空子集 W 对于 V 的两种运算也构成数域 K 上的线性空间, 那么 W 将是 V 的线性子空间.

性质 2.12: 任何一个线性子空间的位数不会超过整个线性空间的维数.

在线性空间中, 由单个的零向量所构成的子集合叫做零子空间; 包含某个向量组的所有子空间的交（显然是最小子空间）称为整个向量组生成的子空间.

一个向量组的秩是指它的一个极大无关组的向量数.

性质 2.13: 两个向量组生成相同的线性子空间的充分必要条件是这两个向量组等价.

性质 2.14: 已知 $\{\beta_j\}_{j=1}^n$ 是一个向量组, 则有 $\dim(\mathrm{span}_K\{\beta_j\}_{j=1}^n) = \mathrm{rank}\{\beta_j\}_{j=1}^n$ 成立.

性质 2.15: 设 U 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间, 向量组 $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ 是 U 的一组基, 那么, 这组向量必定可扩充为整个空间的基, 也就是说, 在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\{\beta_k\}_{k=m+1}^n$, 使得向量组 $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ 是 V 的一组基.

性质 2.16: 子空间们的交依旧是子空间.

设 V_1 和 V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 所有能表示成 $v_1+v_2, v_1\in V_1, v_2\in V_2$, 的向量组成的集合, 称为 V_1 与 V_2 的和, 记作 V_1+V_2. 事实上, 所有同时包含 V_1, V_2 的线性空间的交就是 V_1+V_2.

性质 2.17: 设 V_1 和 V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 那么 V_1+V_2 是线性空间 V 的子空间.

性质 2.18: 设 V_1, V_2, W 是 K 上线性空间 V 的子空间, 且 $W\subset V_1, W\subset V_2$, 那么 $W\subset V_1\cap V_2$ 成立.

性质 2.19: 设 V_1, V_2 和 W 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 且 $V_1\subset W, V_2\subset W$, 那么 $V_1+V_2\subset W$ 成立.

性质 2.20: 设 V_1 与 V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 那么以下三个观点等价:

$$\text{i. } V_1\subset V_2;\qquad \text{ii. } V_1\cap V_2=V_1;\qquad \text{iii. } V_1+V_2=V_2$$

性质 2.21: 如果说 V_1, V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的两个子空间, 那么 $\dim V_1+\dim V_2 = \dim V_1\cap V_2 + \dim(V_1+V_2)$ 成立.

性质 2.22: V_1 和 V_2 是数域 K 上的 n 维线性空间 V 的两个子空间, 如果不等式 $\dim V_1+\dim V_2>n$ 成立, 那么 V_1, V_2 必含有非零的公共向量.

设 V_1 和 V_2 是数域 K 上 n 维线性空间 V 的子空间. 如果 $V_1\cap V_2=\{0\}$, 则子空间 V_1+V_2 称为 V_1 与 V_2 的直和, 记作 $V_1\oplus V_2$.

性质 2.23: V_1 和 V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间.$v_1+v_2=0, v_1\in V_1, v_2\in V_2$ 给出了零向量的一个分解. 则 V_1+V_2 是直和的充分必要条件是 $v_1+v_2=0$, $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$. 只有在 $v_1=0, v_2=0$ 的条件下成立.

性质 2.24: V_1, V_2 是数域 K 上线性空间 V 的子空间. 则 V_1+V_2 是直和当且仅当 $\forall v\in V_1+V_2, v=v_1+v_2$, $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, 这种分解是唯一的.

性质 2.25: V_1 和 V_2 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, $W=V_1+V_2$, 则, $W=V_1\oplus V_2$ 当且仅当 $\dim W=\dim V_1+\dim V_2$.

性质 2.26: 设 $\{v_j\}_{j=1}^n$ 和 $\{w_k\}_{k=1}^m$ 是数域 K 上的线性空间 V 的两个向量组, 那么

$$\mathrm{span}_K(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1},v_n,w_1,w_2,\cdots,w_m)=\mathrm{span}_K(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1},v_n)+\mathrm{span}_K(w_1,w_2,\cdots,w_m)$$

成立.

性质 2.27: 设 V_1 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 那么在线性空间 V 中一定存在一个子空间 V_2, 使得 $V_1\oplus V_2=V$ 成立.

我们称上面的 V_2 是 V 关于子空间 V_1 的商空间, 记作 V/V_1.

设 $\{V_j\}_{j=1}^s$ 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, v 是线性空间 $\sum\limits_{j=1}^s V_j$ 中任意一个向量, 式

$$v=\sum_{j=1}^s v_j, where\quad v_j\in V_j, j=1,2,\cdots,s$$

给出了对于向量 v 的分解, 如果这种分解是唯一的, 则和 $\sum\limits_{j=1}^{s} V_j$ 是直和, 记作 $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \cdots \oplus V_s$ 或 $\bigoplus\limits_{j=1}^{s} V_j$.

性质 2.28: 设 $\{V_j\}_{j=1}^{s}$ 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, v 是线性空间 $\sum\limits_{j=1}^{s}$, 式

$$0 = \sum_{j=1}^{s} v_j, where \quad v_j \in V_j, j = 1, 2, \cdots, s$$

给出了对于向量 $\mathbf{0}$ 的分解. 这种分解是唯一的当且仅当和 $\sum\limits_{j=1}^{s} V_j$ 是直和.

性质 2.29: 设 $\{V_j\}_{j=1}^{s}$ 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 那么和空间 $\sum\limits_{j=1}^{s} V_j$ 为直和的充分必要条件是

$$\forall j, j = 1, 2, \cdots, s. \qquad V_j \cap (\sum_{k=1}^{j-1} V_k + \sum_{k=j+1}^{s} V_k) = 0$$

成立.

性质 2.30: 设 $\{V_j\}_{j=1}^{s}$ 是数域 K 上的线性空间 V 的子空间, 那么和空间 $\sum\limits_{j=1}^{s} V_j$ 为直和的充分必要条件是

$$\dim \sum_{j=1}^{s} V_j = \sum_{j=1}^{s} \dim V_j$$

成立.

性质 2.31: 设 n 是一个正整数, 所有定义在数域 K 上的 n 行列向量构成数 K 上的线性空间, 记为 $K^{n\times 1}$

例题 2.2.1 : 设域 F 上的线性空间 V 中的向量组 a_1, a_2, a_3, a_4, 线性无关, 试问: 向量组 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1$ 是否线性无关? 令

$$W = (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_1),$$

求 W 的一个基和维数.

例题 2.2.2 : 设 σ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个同构映射, 证明: σ^{-1} 是 V' 到 V 的一个同构映射.

例题 2.2.3 : 设 σ 和 τ 分别是域 F 上线性空间 V 到 V' 与 V' 到 V'' 的一个同构映射. 证明: $\tau\sigma$ 是 V 到 V'' 的一个同构映射.

例题 2.2.4 : 证明: 有限域 F_q 上的一元函数 (即 F_q 到自身的映射) 都是一元多项式函数 (即由 F_q 上的一元多项式诱导的函数), 且 F_q 上每一个一元函数都可以唯一地表示成 F_q 上次数小于 q 的一元多项式函数.

例题 2.2.5 : 对于正整数 n, 令

$$Q(\sqrt[n]{3}) = \{a_0 + a_1\sqrt[n]{3} + \cdots + a_{n-1}\sqrt[n]{3^{n-1}} \mid a_i \in \mathbb{Q}, i = 0, 1, 2, \cdots, m-1\}$$

设 n 与 m 是不同的正整数, 试问: Q 上的线性空间 $Q(\sqrt[n]{3})$ 与 $Q(\sqrt[m]{3})$ 是否同构?

例题 2.2.6 : 令 $Q(i) = \{a + bi \mid a, b \in Q\}$, 它是 Q 上的一个线性空间, 试问: $Q(i)$ 与 $Q(\sqrt{2})$ 是否同构? 如果同构, 写出 $Q(i)$ 到 $Q(\sqrt{2})$ 的一个同构映射.

例题 2.2.7 : 设 A, B 都是 n 级实对称矩阵, 证明: 如果 A 与 B 有相同的特征多项式, 那么存在 R^n 到自身的一个同构映射 σ, 使得

$$(\sigma(\alpha))' B (\sigma(\alpha)) = \alpha' A \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

例题 2.2.8 : 设 V 是域 F 上的线性空间, V_1,V_2 是 V 的子空间, 证明: 如果 $V = V_1 \oplus V_2$, 那么 $V \cong V_1 + V_2$.

例题 2.2.9 : 设 $V=K[x]$, 其中 K 是数域, 令

$$W=\{a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m \mid m\in N^*, a_i\in K, i=1,2,\cdots,m\}$$

证明: W 是 V 的一个子空间, 求 W 的一个基, 并且求商空间 V/W 的一个基和维数.

例题 2.2.10 : 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $n\geq 3$, V_1 和 V_2 都是 V 的 $n-1$ 维子空间, 且 $V_1\neq V_2$, 任给 $\alpha\in V$, 能否把 α 分解成 $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$(其中 $\alpha_1\in V_1, \alpha_2\in V_2$)?

例题 2.2.11 : 设 W_1, W_2 分别是数域 F 上的齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间. 求证 $F^n=W_1\oplus W_2$.

例题 2.2.12 : 设 V_1, V_2 是 4 维向量空间 $\mathbb{R}.^4$ 的两个线性子空间, 其中 V_1 是由向量

$$\alpha_1=(1,1,-2,1), \alpha_2=(2,7,1,4), \alpha_3=(-.3,2,11,-1)$$

生成的子空间 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$; 而 V_2 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=0 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2-5x_3+x_4=0 \end{cases}$$

的解空间, 求和空间 V_1+V_2 的维数与一个基:

例题 2.2.13 : 设 W_1, W_2 是线性空间 $M_2(K)$ 的子空间 ,$W_1=L(A_1,A_2), W_2=L(B_1,B_2)$; 其中

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{B}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求 W_1+W_2 的一个基与维数;

(2) 求 $W_1\cap W_2$ 的一个基与维数

(3) 问 $M_2(K)=W_1\oplus W_2$ 是否成立? 为什么?

例题 2.2.14 : 设 W, W_1, W_2 都是线性空间 V 的子空间 ,$W_1\subseteq W, V_{:}=W_1\oplus W_2$, 证明:

$$\dim W=\dim W_1+\dim(W_2\cap W)$$

例题 2.2.15 : 设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间 ,W_1 与 W_2 都是 V 的真子空间. 证明: 在 V 中必存在 α, 使得 $\alpha\notin W_1$ 与 $\alpha\notin W_2$ 同时成立.

例题 2.2.16 : 设 U 是 n 维线性空间 V 的非平凡的子空间, 证明: 在 V 中至少存在两个子空间 W_1, W_2, 使 $V=U\oplus W_1=U\oplus W_2$.

例题 2.2.17 : 设数域 K 上的 n 阶矩阵 A, B, C, D 两两可交换, 且满足 $AC+BD=I$, 又设齐次线性方程组 $ABx=0, Bx=0$ 与 $Ax=0$ 的解空间分别为 W, V_1 和 V_2. 证明 : $W=V_1\oplus V_2$.

例题 2.2.18 : 设 $A\in M_{m,n}(K), B\in M_{n-m,n}(K)$, 其中 $m<n$. 又设 V_1 和 V_2 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$. 与 $Bx=0$ 的解空间. 证明: $K^n=V_1\oplus V_2$ 的充分必要条件是 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}x=0$ 只有零解.

§2.3 线性变换

集合间映射的概念是自然而显然的, 集合到自身的映射又被称为变换. 线性映射, 是指集合是线性空间, 而且映射要满足一些线性性质:

设 f 是数域 K 上线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射, 是指, f 满足保持加法和数乘, 即 $\forall \alpha, \beta \in V_1, k \in K; f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha + \beta), f(k\alpha) = kf(\alpha)$. 某个空间的线性变换即某个空间自身到自身的线性映射.
设 f 是数域 K 上线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射, V_1 的一个子集

$$\{\alpha \in V_1 \mid f(\alpha) = 0\}$$

称为映射 f 的核, 记作 $\ker f$. 容易验证 $\ker f$ 是 V_1 的一个线性子空间.

V_2 的一个子集 $\{\alpha \in V_2 \mid \exists \beta \in V_1, f(\beta) = \alpha\}$ 称为映射 f 的像, 记作 $\operatorname{Im} f$. 容易验证 $\operatorname{Im} f$ 是 V_2 的一个线性子空间. $\dim \operatorname{Im} f$ 被记为线性变换 f 的秩, 记为 $\operatorname{rank} f$
如果两个线性变换 f, g 满足 $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g, \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ 则称他俩是正交的.
如果线性变换 f 满足 $f^2 = f$, 则称 f 是幂等的, 对于线性空间 V 的子空间 W, V 到 W 上的投影 P_W 是自然的, 容易验证它是线性映射, 它也可以看成线性变换, 这个线性变换就是幂等变换, 事实上, 容易验证幂等变换一定是一个投影.
性质 2.32: 设 n 是一个整数, K 是数域, f_A 是定义在线性空间 $K^{n\times 1}$ 的映射, 且

$$f_A(v) = Av$$

给出了映射 f_A 的表达式, A 是 n 阶方阵, 那么映射 f_A 是线性变换.
性质 2.33: 哈哈.
性质 2.34: 设 n 是一个整数, K 是数域, f_A 是定义在线性空间 $K^{n\times 1}$ 的映射, 且

$$f_A(v) = Av$$

给出了映射 f_A 的表达式, A 是 n 阶方阵. 如果 $\tilde{v} = \sum_{j=1}^{r} k_j \cdot v_j$, 则 $f(\tilde{v}) = \sum_{j=1}^{r} k_j \cdot f(v_j)$.

我们谈向量的表示是指向量可以和一个数组一一对应, 且对应保持线性性; 我们谈线性映射的表示是指线性映射可以和一个矩阵一一对应, 且保持映射与向量的作用是矩阵与向量的乘积. 线性变换一定可以用一个矩阵表示, 就是说存在一个对应 $\sigma: f \mapsto A_f$. 满足这是一一的, 且 $f(v) = Av$. 具体操作, 只需要设 $\{\beta_j\}_{j=1}^{n}$ 是数域 K 上的线性空间 V 的一组基, 则任何向量 v 都可以唯一表示成

$$v = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n)^t, \qquad (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in K^{1\times n}$$

这里也说明了对于任意给定的数域 K, 选定一组基后, 任何有限维线性空间均在线性空间的意义下同构于某个 $K^{1\times n}$(同理也可同构于 $K^{n\times 1}$). 设

$$f(\beta_j) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \cdot (k_{1,j}, k_{2,j}, \cdots, k_{n,j})^t = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \cdot p_j$$

则有

$$f(v) = f((\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n)^t) = f((\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)) \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n)^t =$$

$$(f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_n)) \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n)^t = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \cdot (p_1, p_2, \cdots, p_n) \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n)^t$$

记 $A = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 即可.
考虑基变换矩阵 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \cdot P$. 由上面的推导过程, 容易看出, 有线性变换 f 在基 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 下的表示 B_f 与其在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 下的表示 A_f 之间的关系是 $B_f = PA_fP^{-1}$. 如果两个矩阵关系形如如上, 就称它俩相似, 容易验证行列式, 秩, 迹都是相似不变量, 由此, 我们把线性变换的表示矩阵的行列式, 秩, 迹称为它本身的行列式, 秩, 迹, 相似关系十分重要. 总之, 就是非常有用.

类似上面的推导, 我们可以知道线性映射也可以表示成矩阵, 且 n 为线性空间到 m 维线性空间的线性映

射总是可以表示成 $m\times n$ 阶矩阵; 我们也可以得出不同基下的同一线性映射的表示矩阵是相抵的关系. 特别的我们可以通过基变换, 让 f 变成一个"投影"或者"嵌入", 又由于矩阵的秩是相抵不变量, 所以两个秩的概念是等价的.

值得一提的是, 商空间的定义总是空间模掉一个等价关系, 无论是拓扑空间也好, 线性空间或模也罢, 总是这样. 对于线性空间, 或者模, 总是可以把给定的线性子空间 R 给模掉, 意思是 v 等价于 w 当且仅当 $v-w\in R$. 但是对于线性空间, 商空间也可以通过上一节的方式定义, 并且这么定义的两种空间, 在线性空间的意义下是同构的. 而且上一节的定义十分具体且形象. 比如如果按模子空间那么定义, 商空间 V/R 的基肯定是形如 $\{\beta_j+R\}_{j=1}^k$, 这样很没劲. 按上一节的定义, 则基可以写成 $\{\beta_j\}_{j=1}^k$.

例题 2.3.1 : 设 V 是域 F 上的线性空间, 给定 $a\in F,\delta\in V$. 令 $A(\alpha)=a\alpha+\delta,\forall\alpha\in V$. 试问: A 是不是 V 上的线性变换?

例题 2.3.2 : 把复数域 $\mathbb{C}$ 分别看作实数域和复数域上的线性空间. 令 $A(z)=\bar{z},\forall z\in\mathbb{C}$. 试问 A 是不是 $\mathbb{C}$ 上的线性变换?

例题 2.3.3 : 设 A 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射, W 是 V 的一个子空间, 令

$$AW:=\{A\beta\mid\beta\in W\}$$

证明若 V 是有限维的, 则

$$\dim(AW)+\dim((\operatorname{Ker}A)\cap W)=\dim(W)$$

例题 2.3.4 : 设 V,W,U 都是域 F 上的线性空间, 并且 V 是有限维的. 设 $A\in Hom(V,U),B\in Hom(U,W)$. 证明:

$$\dim\operatorname{Ker}BA\leqslant\dim\operatorname{Ker}A+\dim\operatorname{Ker}B$$

例题 2.3.5 : 设 V,W,U 都是域 F 上的线性空间, 并且 $\dim V=n,\dim W=m$. 设 $A\in Hom(V,U),B\in Hom(U,W)$. 证明:

$$\operatorname{rank}BA\geqslant\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-m$$

例题 2.3.6 : 设 V,W,U,M 都是域 F 上的线性空间, 并且 V,U 是有限维的. 设 $A\in Hom(V,U),B\in Hom(U,W),C\in Hom(W,M)$. 证明:

$$\operatorname{rank}CBA\geqslant\operatorname{rank}CB+\operatorname{rank}BA-\operatorname{rank}B$$

例题 2.3.7 : 设 V 和 V' 都是域 F 上的线性空间, A 是 V 到 V' 的线性映射. 证明: 存在直和分解:

$$V=\operatorname{Ker}A\oplus W,\qquad V'=M\oplus N,$$

使得 $W\cong M$

例题 2.3.8 : 设 V 是域 F 上的一个线性空间, $charF=0$. 证明: 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 是两两不等的 V 上的线性变换, 那么 V 中至少有一个向量 α, 使得 $A_1\alpha,A_2\alpha,\cdots,A_s\alpha$ 两两不等.

例题 2.3.9 : 设 A,B 都是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: 如果 $\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}B$, 那么对于任意 V 上的线性变换 C, 都有 $\operatorname{rank}ABC=\operatorname{rank}BC$.

例题 2.3.10 : 设 A 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换, 证明: 存在一个正整数 m 使得

$$A^m V = A^{m+k} V, \quad \forall k \in N^*$$

例题 2.3.11 : 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, A 是 V 上的一个线性变换, W 是 V 的一个子空间, 用 $A^{-1}W$ 表示 W 在 A 下的原像集. 证明:

1. $\dim W - \dim \operatorname{Ker} A \leqslant \dim AW \leqslant \dim W$

2. $A^{-1}W$ 是 V 的一个子空间, 且

$$\dim A^{-1}W \leqslant \dim W + \dim \operatorname{Ker} A$$

3. 若 $W \subseteq \operatorname{Im} A$, 则

$$\dim A^{-1}W \geqslant \dim W$$

例题 2.3.12 : 设 $V = \mathbb{R}[x]$, 令

$$W = \{(x^2+1)h(x) \in \mathbb{R}[x]\}$$

(1) 证明: W 是 V 的一个子空间;

(2) 商空间 V/W 的元素是什么? 求 V/W 的一个基和维数.

例题 2.3.13 : 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 用 U 表示 A 的列空间, 用 W 表示 AA' 的列空间, 证明: $U = W$.

例题 2.3.14 : 设 V 和 V' 分别是域 F 上的 n 维、s 维线性空间, A 是 V 到 V' 的一个线性映射, 它在 V 的一个基和 V' 的一个基下的矩阵为 A. 证明: A 是单射当且仅当 A 是列满秩矩阵; A 是满射当且仅当 A 是行满秩矩阵.

例题 2.3.15 : 设 V 和 V' 分别是实数域上 n 维、m 维线性空间, A 是 V 带 V' 的一个线性映射, 它在 V 的一个基和 V' 的一个基下的矩阵是 A, 证明: 如果 A 是单射, 那么 A 可以分解成

$$A = QDT'$$

其中 Q 是列向量组为正交单位向量组的 $m \times n$ 矩阵; D 是 n 级对角阵, 其主对角元 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 $A'A$ 的全部特征值; $T = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 是 n 级正交矩阵, η_i 是 $A'A$ 的属于特征值 λ_i^2 的一个特征向量, $i = 1, 2, \cdots, n$.

证明: 由于 A 是单射, 因此 A 是列满秩矩阵, 故 A 可以分解成

$$A = Q_1 R$$

其中 Q_1 是列向量组为正交单位向量组的 $m \times n$ 矩阵, R 是主对角元都为正数的 n 级上三角矩阵. 那么

$$R = T_1 diag\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} T_2$$

其中 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ 是 $R'R$ 的全部特征值, 且 $\lambda_i > 0$,T_1, T_2 均是 n 级正交矩阵. 于是

$$A = QDT'$$

其中由于

$$Q'Q = (Q_1T_1)'(Q_1T_1) = I_n$$

因此 Q 的列向量组是正交单位的, 且

$$A'A = TD^2T'$$

因此; $T=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 是 n 级正交矩阵, η_i 是 $A'A$ 的属于特征值 λ_i^2 的一个特征向量, $i=1,2,\cdots,n$.

例题 2.3.16 : 设 $\mathscr{B}$ 是线性空间 V 上的一个线性变换, 且满足 $\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$. 证明 V 是 $\mathscr{B}$ 的象与核的直和, 即 $V=\mathrm{Im}\mathscr{B}\oplus\ker\mathscr{B}$.

例题 2.3.17 : 设 $A\in M_{m,n}(K),B\in M_{l,n}(K),W$ 是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解空间 $\mathscr{A}\in\mathrm{Hom}_K\left(K^n,K^m\right)$ 的定义为 : $\mathscr{A}(\alpha)=A\alpha$. 证明 : $\dim(\mathscr{A}(W))=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-\mathrm{rank}(B)$

$$f(X)=|x_1|+\cdots+|x_r|-|x_{r+1}|-\cdots-|x_{r+s}|,\forall X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^\top\in\mathbb{R}^n$$

其中 $r\geqslant s\geqslant 0$. 证明: **(1).** 存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个 $n-r$ 维子空间 W, 使得 $f(X)=0,\forall X\in W$;

$$\dim\left(W_1\cap W_2\right)\geqslant n-(r+s)$$

例题 2.3.18 : 设 V 是数域 K 上的 n 维线性交间 ,$W_1,W_2,\cdots,W_s$ 是 V 的 s 个非平凡子空间. 证明: **(1)** 存在 $\alpha\in V$, 使得 $\alpha\notin W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_s$; **(2)** 存在 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$; 使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\cap(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_s)=\emptyset$.

例题 2.3.19 : 设 V 和 V' 都是数域 K 上的有限维线性空间 ,σ 是 V 到 V' 的线性映射. 证明: 存在直和分解

$$V=U\oplus W,\quad V'=M\oplus N$$

使得 **Ker** $\sigma=U,W\cong M$

例题 2.3.20 : 设 A,B 是数域 K. 上的 $m\times n$ 矩阵, U 与 V 分别是齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 的解空间. 证明: 若 $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,B$, 则存在 K 上的 n 阶可逆矩阵 T, 使得 $f(y)=Ty$ $(\forall y\in U)$ 是 U 到 V 的一个同构映射.

例题 2.3.21 : 设 M 是 $P^{n\times n}$ 的一个非空子集, 假定 M 满足下列条件: **(1)** M 中至少有一个非零矩阵; **(2)** $\forall: A,B\in M; A-B\in M$ **(3)** $\forall A\in M; X\in P^{n\times n}, AX\in M, XA\in M$ 证明 : $M=P^{n\times n}$

例题 2.3.22 : 设 A,B 均为数域 K 上的 n 阶方阵, $\mathrm{rank}\,A=r,\mathrm{rank}\,B=s,\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=k$. 又设 W_1,W_2 为满足 $AX=O,BX=O$ 的 n 阶方阵 $X\in M_n(K)$ 构成的解空间. 试求 $\dim\left(W_1+W_2\right)$.

例题 2.3.23 : 证明: 数域 P 上迹为 **0** 的 n 阶方阵全体构成 n 阶方阵空间 $P^{n\times n}$ 的线性子空间, 并求这个子空间的维数和一个基.

第 3 章　相似标准型

线性变换 f 在基 $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ 下的表示 B_f 与其在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 下的表示 A_f 之间的关系是 $B_f = PA_fP^{-1}$. 如果两个矩阵关系形如如上, 就称它俩相似, 相似关系十分重要. 总之, 就是非常有用. 为了搞清楚相似关系, 多项式理论是必要且深刻的, 总之, 就是非常有用.

§3.1　多项式理论

数域 K 上的一元多项式就是指形如下述的表达式: $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j x^j$, 如果 $a_n \neq 0$, 则称其为该多项式的首项, n 称为该多项式的次数, 记作 $degf$, 并约定 $deg0 = -\infty$.

当 K 是数域时, 我们总是尽可能地讨论多项式是首项系数为 1 的, 因为各种方便.

数域 K 上所有一元多项式的全体记作 $K[x]$, 它显然是一个环.

如果一个方阵 A, 一个多项式 f, 满足 $f(A) = 0$, 则称 f 是 A 的零化多项式. 如果这个多项式是首一的, 而且还没有更低次数的多项式零化 A, 则称 f 是 A 的极小多项式.

$K[A]$ 显然是一个环, 而且这个环同构于 $K[x]/f(A)$, 其中 f 是 A 的极小多项式.

$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ 被称为方阵 A 的特征多项式. 那么 A 的特征多项式是 A 的一个极小多项式.

任何一个域 K 都有代数闭包 $\bar{K}$, 数域 K 上一元多项式 f 在 $\bar{K}$ 中的根是指 $t \in \bar{K}, f(t) = 0$, 由代数闭域的构造, 次数为 n 的多项式一定有 n 个根.

一个方阵 A, 它的特征多项式在代数闭域上的根被叫做特征值, 在代数闭域上, 每个方阵的特征值 λ 都会对应一个特征向量 v_λ, 这个特征向量满足 $Av_\lambda = \lambda v_\lambda$, 并且, 不同的特征值一定对应不同的特征向量, 并且这些不同特征值的特征向量们线性无关. 这是因为, 如果线性相关, 作用一次 A, 依次作用下去, 作用 n 次, 然后由范德蒙行列式非零导出矛盾.

由简单的环论知识我们知道 $K[A]$ 是一个唯一因子分解环, 更是一个欧几里得整环. 当然, 如果是有限域或者特征为 0 的域, 这个直接靠定义验证, 也不是很费劲. 总之, 就是, 两个多项式的最大公因式, 就按它是唯一因子分解环那么定义即可.

如果两个多项式的最大公因式是常数, 我们称它们俩互素; 换句话说, 两个多项式 $f(x), g(x)$ 互素, 当且仅当他们满足裴蜀等式

$$\exists u(x), v(x) \in K[x], \deg u(x) \leqslant \deg g, \deg v(x) \leqslant \deg f, u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

由此我们发现, 多项式的互素与否, 是在数域被扩大或缩小时保持不变的.

如果一个矩阵, 它的极小多项式没有重根, 那么称这个矩阵是半单的, 以后我们会证明, 半单阵一定可以相

似于一个对角阵.

对于多项式 $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, 它的形式微商定义为 $\sum_{j=0}^{n} j a_j x^{j-1}$

如果一个多项式的因式只有单位和自己的相伴元, 就称它是不可约的. 即: 对于 $K[x]$ 中一个次数大于 0 的多项式 $f(x)$ 来说, 如果它在 $K[x]$ 中的因式只有 K 中的非零数和 $f(x)$ 的相伴元, 那么称 $f(x)$ 是数域 K 上的一个不可约多项式; 否则称 $f(x)$ 是可约的. 不可约多项式在研究数域 K 上一元多项式环 $K[x]$ 的结构中起着基本建筑项的作用.

设 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 是一个次数 n 大于 0 的整系数多项式, 如果 $\frac{q}{p}$ 是 $f(x)$ 的一个有理根, 其中 p, q 是互素的整数, 那么 $p \left| a_n, q \right| a_0$.

Eisenstein 判别法:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

是一个次数 n 大于 0 的本原多项式. 如果存在一个素数 p, 使得

$1^{\circ} p \mid a_i, i=0,1, \cdots, n-1$;

$2^{\circ} p \nmid a_n$

$3^{\circ} p^2 \nmid a_0$

那么 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

有时直接用 Eisenstein 判别法无法判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是否不可约, 这时可尝试选择一个有理数 b(通常取 $b=1$, 或 -1), 如果用 Eisenstein 判别法能判断 $g(x)=f(x+b)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约, 那么 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约. 对于 Eisenstein 判别法中的 3 个条件, 很自然地会想: 如果改成存在素数 p, 使得

$$p \mid a_i, \quad i=1,2, \cdots, n, \quad p \nmid a_0, p^2 \nmid a_n$$

那么 $f(x)$ 是否在 $\mathbf{Q}$ 上不可约? 这个答案是肯定的, 不可约!

设 $p(x)$ 是 $K[x]$ 中一个次数大于 0 的多项式, 则下列命题等价: (1) $p(x)$ 是不可约多项式 ;

(2) $\forall f(x) \in K[x]$, 有 $p(x) \mid f(x)$ 或 $(p(x), f(x))=1$;

(3) 在 $K[x]$ 中, 从 $p(x) \mid f(x) g(x)$ 可推出

$$p(x) \mid f(x) \text{ 或} p(x) \mid g(x)$$

(4) $p(x)$ 不能分解成两个次数较低的多项式的乘积.

上述是分别从因式的角度、从与任一多项式的关系的角度、从整除关系的角度, 以及从因式分解的角度对不可约多项式的刻画.

从不可约多项式的等价条件 (4) 猜测有下述定理: 唯一因式分解定理,$K[x]$ 中任一次数大于 0 的多项式 $f(x)$ 能够唯一地分解成数域 K 上有限多个不可约多项式的乘积. 所谓唯一性是指, 如果 $f(x)$ 有两个这样的分解式:

$$f(x)=p_1(x) p_2(x) \cdots p_s(x)=q_1(x) q_2(x) \cdots q_t(x)$$

那么一定有 $s=t$, 且适当排列因式的次序后有

$$p_i(x) \sim q_i(x), \quad i=1,2, \cdots, s$$

每一个次数大于 0 的实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与判别式小于 0 的二次因式的乘积. 即

$$f(x)=a\left(x-c_1\right)^{r_1} \cdots\left(x-c_s\right)^{r_s}\left(x^2+p_1 x+q_1\right)^{k_1} \cdots\left(x^2+p_t x+q_t\right)^{k_r}$$

其中 a 是 $f(x)$ 的首项系数；$c_1,\cdots,c_s$ 是两两不等的实数；$(p_1,q_1),(p_2,q_2),\cdots,(p_i,q_t)$ 是不同的实数对, 且满足 $p_i^2-4q_i<0, i=1,2,\cdots,t; r_1,\cdots,r_s,k_1,\cdots,k_t$ 都是非负整数. 从实系数多项式的分解式看出, 如果虚数 z 是 $f(x)$ 的一个复根, 那么 $\bar{z}$ 也是 $f(x)$ 的一个复根, 且它们的重数相同. 因此通常我们说: "实系数多项式的虚根共轩成对出现. "

一个不可约多项式 p 被称为 f 的 k 重因式, 是指, $p^k \mid f$ 但是 $p^{k+1}\nmid f$, 一个多项式 f 有没有 2 重及以上因式当且仅当 f 与它的形式微商互素.

由于环 $K[x]$ 是交换环, 所以, 次数为 n 的多项式, 它的根不会超过 n 个. 在 $K[x]$ 中, $x-a$ 是 $f(x)$ 的一次因式当且仅当 $f(a)=0$.

对于唯一因子分解环整环, 有中国剩余定理, 环 $K[x]$ 应用中国剩余定理, 可以得到拉格朗日插值公式.

$$f(x)\equiv d_j \mod x-c_j$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j(x-c_1)\cdots(x-c_{j-1})(x-c_{j+1})\cdots(x-c_n)}{(c_j-c_1)\cdots(c_j-c_{j-1})(c_j-c_{j+1})\cdots(c_j-c_n)}+g(x)(x-c_1)\cdots(x-c_n)$$

实数域上的不可约多项式, 有且仅有一次多项式和二次不可约多项式.

一个非零的整系数多项式 $g(x)$, 如果它的各项系数的最大公因数只有士 1 , 那么称 $g(x)$ 是一个本原多项式. 任何一个非零的有理系数多项式 $f(x)$ 都与一个本原多项式相伴 ($\frac{m}{d}f(x)$ 就是一个本原多项式). 进一步可以证明: 与 $f(x)$ 相伴的本原多项式在相差一个正负号下是唯一的. 著名的高斯引理说明了, 本原多项式的乘积还是本原的.

多元多项式, 我们能处理的简单方法只有字典排序这一思想. 要记住一个名词: 数域 K 上的 n 元多项式 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 m 次齐次多项式, 如果它的每个系数不为 0 的单项式都是 m 次的. 零多项式可以看成是任意次数的齐次多项式.

例题 3.1.1： 判别下列有理系数多项式有无重因式. 如果有重因式, 试求出一个多项式与它有完全相同的不可约因式 (不计重数), 且这个多项式没有重因式. **(1)** $f(x)=x^3-3x^2+4$ **(2)** $f(x)=x^3+2x^2-11x-12$

例题 3.1.2： 对于第 **1** 题中有重因式的多项式 $f(x)$, 求出它在 $\mathbf{Q}[x]$ 中的标准分解式.

例题 3.1.3： 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中, $f(x)=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$. **(1)** 求一个没有重因式的多项式 $g(x)$, 使它与 $f(x)$ 含有完全相同的不可约因式 (不计重数); **(2)** 求 $f(x)$ 的标准分解式.

例题 3.1.4： 举例说明: 在数域 K 上的一元多项式环 $K[x]$ 中, 一个不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式 $(k\geqslant 2)$, 但是 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的 k 重因式.

例题 3.1.5： 设 K 是数域, 证明: 在 $K[x]$ 中, 若不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式 $(k\geqslant 1)$, 并且 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的因式, 则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

例题 3.1.6： 设 K 是数域, 证明: 在 $K[x]$ 中, 不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式 $(k\geqslant 1)$ 的充分必要条件为：$p(x)$ 是 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$ 的因式, 但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

例题 3.1.7： 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中, $f(x)=2x^3-7x^2+4x+a$, 求 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 中有重根, 并且求出相应的重根及其重数.

例题 3.1.8 :$\mathbf{Q}[x]$ 中, $f(x)=x^3-x^2-x-2, g(x)=x^4-2x^3+2x^2-3x-2$. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有无公共复根? 如果有, 试把它求出来.

例题 3.1.9： 设 $f(x)=x^4-5x^3+ax^2+bx+9\in\mathbf{Q}[x]$, 如果 **3** 是 $f(x)$ 的二重根, 求 a,b.

例题 3.1.10： 证明: 在 $K[x]$ 中, 如果 $x+1\mid f\left(x^{2k+1}\right)$, 那么 $x^{2k+1}+1\mid f\left(x^{2k+1}\right)$, 其中 k 是任意自然数.

例题 3.1.11 : 证明: 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中, 如果 $x^2+1 \mid f_1\left(x^4\right)+x f_2\left(x^4\right)$, 那么 **1** 是 $f_i(x)$ 的根 $, i=1,2$.

例题 3.1.12 : 证明: 如果数域 K 上两个首一不可约多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有一个公共复根, 那么 $f(x)=g(x)$

例题 3.1.13 : 设 $K[x]$ 中 n 次多项式

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

的 n 个复根是 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 对于 $b \in K$, 求数域 K 上以 $b c_1, b c_2, \cdots, b c_n$ 为复根的多项式.

例题 3.1.14 : 设 $A \in M_n(K), A$ 的不等于零的主子式的最高阶数称为 A 的主秩, 记作 $\operatorname{pr}(A)$. 证明 : A 的非零特征值的个数 (重根按重数计算) 不超过 $\operatorname{pr}(A)$, 也不超过 $\operatorname{rank}(A)$.

例题 3.1.15 : 设 $f\left(x_1, \cdots, x_n\right), g\left(x_1, \cdots, x_n\right) \in K\left[x_1, \cdots, x_n\right]$, 且 $g\left(x_1, \cdots, x_n\right) \neq 0$, 其中 K 是数域. 官明: 如果对于使得 $g\left(c_1, \cdots, c_n\right) \neq 0$ 的任意一组元素 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in K$, 都有 $f\left(c_1, \cdots, c_n\right)=0$, 那么 $f\left(x_1, \cdots, x_n\right)=0$

例题 3.1.16 : 证明: 在 $K\left[x_1, \cdots, x_n\right]$ 中 $, f$ 与 g 相伴当且仅当存在 $c \in K$, 使得 $f=c g$.

例题 3.1.17 : 证明: 在 $K[x, y]$ 中, 多项式 x^2-y 是不可约的.

例题 3.1.18 : 证明: 在复数域上的二元多项式环中, x^3+y 是不可约的.

例题 3.1.19 : 下列实数域上的三元二次齐次多项式是否可约? 如果可约, 把它因式分解. **(1)** $f(x, y, z)=3 x^2-2 y^2+5 x y+3 x z-y z$ **(2)** $g(x, y, z)=x^2+2 y^2+z^2+2 x y+2 x z$.

例题 3.1.20 : 设 $f(x)=x^5-x^2+1 \in \mathbf{Z}[x]$, 判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是否不可约.

例题 3.1.21 : 设 $f(x)=x^4-5 x+1 \in \mathbf{Z}[x]$, 判晰 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是否不可约.

例题 3.1.22 : 设 $f(x)=11 x^3+4 x^2+10 x+34 \in \mathbf{Z}[x]$, 判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是否不可约.

例题 3.1.23 : 设 $f(x)=x^4+3 x^3+3 x^2-5 \in \mathbf{Z}[x]$, 判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上是否不可约.

例题 3.1.24 : $\mathbf{Z}_3[x]$ 中 $, f(x)=\overline{2} x^5-x^4+\overline{2} x^2+x-\overline{2}$, 求一个次数小于 **3** 的多项式 $g(x)$, 使得 $f=g$

例题 3.1.25 : 设 a, b 是方程 $x^4+x^3-1=0$ 的两个根, 则 $a b$ 是方程 $x^6+x^4+x^3-x^2-1=0$ 的一个根.

例题 3.1.26 : 设整系数多项式 $f(x)$ 的次数是 $n=2 m$ 或 $n=2 m+1$ (其中 m 为正整数). 证明: 如果有 $k(\geqslant 2 m+1)$ 个不同的整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 使 $f\left(a_i\right)$ 取值 **1** 或 -1, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

例题 3.1.27 : 设 $f(x)$ 为实系数多项式, $f(r) \geqslant 0$ 对 $r \in R$ 总成立, 则存在实系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$, 使 $f(x)=(g(x))^2+(h(x))^2$.

例题 3.1.28 :$f(x)$ 是有理数域上的多项式, 已知 $f(x)$ 的某一根的倒数也是 $f(x)$ 的根. 证明 : $f(x)$ 的每一根的倒数都是 $f(x)$ 的根.

例题 3.1.29 : 设 $f(x), g(x)$ 都是 $P[x]$ 中的非零多项式, 且 $g(x)=s^m(x) g_1(x)$, 这里 $m \geqslant$ **1.** 又设 $\left(s(x), g_1(x)\right)=1, s(x) \nmid f(x)$. 证明: 存在 $f_1(x), r(x) \in P[x]$, 且 $r(x) \neq 0, \operatorname{degr}(x)<\operatorname{deg} s(x)$, 使

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{s^m(x)}+\frac{f_1(x)}{s^{m-1}(x) g_1(x)}$$

例题 3.1.30 : 假设 $f_0\left(x^5\right)+x f_1\left(x^{10}\right)+x^2 f_2\left(x^{15}\right)+x^3 f_3\left(x^{20}\right)$ 能被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除. 证明 $f_i(x)(i=0,1,2,3)$ 能被 $x-1$ 整除.

例题 3.1.31 : 设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 **3** 的首项系数为 **1** 的互异多项式, x^4+x^2+1 整除 $f_1\left(x^3\right)+x^4 f_2\left(x^3\right)$. 试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

例题 3.1.32 : 设 $\sum_{i=0}^{n-1} x^i P_i\left(x^{i n}\right)=P\left(x^n\right)$, 且 $(x-1) \mid P(x)$, 其中 $P_i(x)(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ $P(x)$ 都是实系数多项式. 证明: $(-1) P_i(x)=0(1 \leqslant i \leqslant n-1)(2) P(x)=0 ;(3) P_0(1)=0$

例题 3.1.33 : 设 $f(x),g(x)\in K[x],n$ 为正整数, 证明: 若 $g^n(x)\mid f^n(x)$; 则 $g(x)\mid f(x)$.

§3.2 Jordan 标准型

我们容易验证, 如果一个 V 上的线性变换 A, 它满足, 对直和 $V_1\oplus V_2=V$ 中的 V_1,V_2, 都有 $AV_1\subseteq V_1,AV_2\subseteq V_2$, 则可以选取一组基, 使得 A 对应的矩阵形如 $diag\{A_1,A_2\}$ 的分块矩阵, 且 $rankA_1=\dim V_1$. 特别地, $A_1=A|_{V_1},A_2=A|_{V_2}$. 类似地, 对 $V=\bigoplus_{j=1}^{k}V_j$ 也有类似的结论, 选取合适的基, 使得 $A=diag\{A|_{V_1},A|_{V_2},\cdots,A|_{V_k}\}$.

接下来我们总是提及代数闭域, 可以把它想象是 $\mathbb{C}$, 考虑线性变换 A 的极小多项式 $P(A)=\Pi_{j=1}^{s}(A-\lambda_jI)^{r_j}$ 由多项式理论, 显然有 $(A-\lambda_jI)^{r_j}$ 们两两互素, 所以它们的最大公因式是 1, 即存在 $\{u_j(A)\}_{j=1}^{s}$ 使得 $\sum_{j=1}^{s}u_j(A)(A-\lambda_jI)^{r_j}=1$, 即 $\sum_{j=1}^{s}Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}$ 是直和. 这是因为 $Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}+Ker(A-\lambda_kI)^{r_k}=Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}(A-\lambda_kI)^{r_k}$. 又由于 $KerP(A)=V$, 故 $V=\bigoplus_{j=1}^{s}Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}$, 由于 $AKer(A-\lambda_jI)^{r_j}\subseteq(A-\lambda_jI)^{r_j}$, 因此 $Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}$ 是 A 的不变子空间, 称之为根子空间. 显然特征子空间在根子空间中. 则在每个根子空间中, $(A-\lambda_jI)|_{Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}}$ 是幂零的, 而且是 r_j 阶幂零的. 即存在 $\alpha\in Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}$, 使得 $(A-\lambda_jI)^{r_j-1}\alpha\neq0$. 记 $span_F\{\alpha,\cdots,(A-\lambda_jI)^{r_j-1}\alpha\}=<\alpha>$.

固定 $Ker(A-\lambda_jI)^{r_j}=V_1$,$Ker(A-\lambda_jI)$ 是它的子空间. $Ker(A-\lambda_jI)$ 是若干个线性无关的 λ_j 特征向量 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{p}$ 生成的. 固定这些 $\{\alpha_k\}$, 与 $Ker(A-\lambda_jI)$ 交是含某个 α_k 的一维线性空间的 $<\alpha>$ 是存在的, 它显然可以是 $<\alpha_k>$, 那么对每个 α_k, 我取最高维数的任意一个 $<\alpha>$, 它与 $Ker(A-\lambda_jI)$ 的交是一维线性空间, 包含 α_k, 记为 W_k. 显然, $\sum_{k=1}W_k=V$, 这由归纳即可说清楚. 又可以通过不停的被 A 作用, 得到线性无关, 因此和是直和. 那么有 $A-\lambda_jI|_{V_1}=diag\{A-\lambda_j|_{W_1},\cdots,A-\lambda_jI|_{W_p}\}$, 这里的 $A-\lambda_jI|_{W_k}$ 可以是 $\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$, 我们记 $J_n(\lambda_j)=\begin{pmatrix}\lambda_j&1&&\\&\lambda_j&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\lambda_j\end{pmatrix}$

由以上的讨论, 我们知道, 选取合适的基, 我们可以让 A 相似于 $diag\{J_{n(1)}(\lambda_{j(1)}),J_{n(2)}(\lambda_{j(2)}),\cdots,J_{n(q)}(\lambda_{j(q)})\}$, 其中 q 是 A 的特征向量的个数. 由此我们显然知道代数重数大于几何重数. 而且知道任何一个 V 中的向量, 都可以 A 的根子空间中的向量的线性组合, 换言之, 任何 A 的不变子空间 W, 都有 $W=\bigoplus_{j=1}^{s}(W\cap Ker(A-\lambda_jI)^{r_j})$.

例题 3.2.1 : 设 A,B 分别是域 F 上 n 级、**m** 级矩阵 . 证明: 如果 A 的最小多项式 $m_1(\lambda)$ 与 B 的最小多项式 $m_2(\lambda)$ 互素, 那么矩阵方程 $XA=BX$ 只有零解.

例题 3.2.1 : 设 A,B 分别是域 F 上 n 级 m 级矩阵, 其最小多项式分别为 $m_1(\lambda),m_2(\lambda)$。证明: 如果 $m_1(\lambda)$ 与 $m_2(\lambda)$ 有公共的一次因式, 那么矩阵方程 $XA=BX$ 有非零解.

例题 3.2.3 : 设 $A=\operatorname{diag}\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 是数域 K 上的 n 级矩阵, 其中 A_i 是主对角元都为 a_i 的 n_i 级上三角矩阵 ,$i=1,2,\cdots,s$。证明 : A 可对角化当且仅当每个 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是数量矩阵.

例题 3.2.4 : 设 $\boldsymbol{B}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的幂零变换. 证明: 如果 $\boldsymbol{B}$ 有两个线性无关的特征向量, 那么 $\boldsymbol{B}$ 的幂零指数 $l<n$.

例题 3.2.5 : 设 V 是域 F 上的线性空间. 证明 : V 上的一个幂零变换 $\boldsymbol{B}$ 与任一非零数乘变换 $\boldsymbol{k}$ 的和 $B+k$

是可逆变换, 并且求 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{k})^{-1}$.

例题 3.2.6 : 设 $\mathbf{A}, \boldsymbol{B}$ 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明: 如果 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{B}$ 是幂零变换, 那么 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$.

例题 3.2.7 : 设 A, B 都是数域 K 上的 n 级矩阵, 其中 B 是幂零矩阵, 且 $AB=BA$, 证明:

$$|A+B|=|A|$$

例题 3.2.8 : 设 A, B, C 都是 n 级复矩阵, 且 $AB-BA=C$。证明: 如果 C 与 A 可交换, 那么 C 是幂零矩阵.

例题 3.2.9 : 设 A, B 都是 n 级复矩阵, 且 $AB-BA=A$. 证明 : A 是幂零矩阵.

例题 3.2.10 : 证明: 对于 $K[x]_n$ 上的求导数变换 $\boldsymbol{D}$, 不存在 $K[x]_n$ 上的线性变换 $\boldsymbol{H}$, 使得 $\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{D}$.

例题 3.2.11 : 对于 $K[x]_n$ 上的求导数变换 $\boldsymbol{D}, K[x]_n$ 上所有与 $\boldsymbol{D}$ 可交换的线性变换组成的子空间记作 $\mathrm{C}(\boldsymbol{D})$, 求 $\mathrm{C}(\boldsymbol{D})$ 及其维数.

例题 3.2.12 : 设域 F 上的 n 级矩阵 A 为上三角矩阵, 其主对角元都为 a_1, 且 $a_2 \neq 0$. 求 A 的 **Jordan** 标准形:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix}$$

例题 3.2.13 : 设 A 是 n 级复矩阵 , $n>1$. 如果 $\operatorname{rank}(A)=1$, 求 A 的 **Jordan** 标准形.

例题 3.2.14 : 设 A 是 n 级复矩阵 , $n>1$. 如果 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{rank}(A)=1$, 求 A 的 **Jordan** 标准形.

例题 3.2.15 : 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵, 证明: 如果 A 的特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^n$, 那么 $A \sim A^k$, 其中 $k=2,3, \cdots, n$.

例题 3.2.16 : 设域 F 上的 n 级矩阵 A 有 **Jordan** 标准形. 证明 : A 可对角化当且仅当对于 A 的任一特征值 λ_i 有

$$\operatorname{rank}\left(A-\lambda_i I\right)^2=\operatorname{rank}\left(A-\lambda_i I\right)$$

例题 3.2.17 : 设 $1<k<n$, 求 $J_n(0)^k$ 的 **Jordan** 标准形.

例题 3.2.18 : 证明: 如果 n_1 级复矩阵 A_1 与 n_2 级复矩阵 A_2 没有公共的特征值, 那么对任意 $n_1 \times n_2$ 复矩阵 B, C, 有

$$\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

例题 3.2.19 : 下列复矩阵 A 有没有平方根? 如果有, 求出 A 的一个平方根. **(1)** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ **(2)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

例题 3.2.20： 设 a 是任一给定的复数，对于 l 级 **Jordan** 块 $J_l(a)$，求 $\mathrm{e}^{J_l(a)}$ 的特征值.

例题 3.2.21： 设 A 是 n 级复矩阵，其全部特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。证明：$\mathrm{e}^A$ 的全部特征是 e^{λ_1}，$\mathrm{e}^{\lambda_2}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n}$

例题 3.2.22： 设 A 是 n 级复矩阵，求 e^A 的行列式.

§3.3 多项式矩阵的相抵

这节的内容主要是判断两个矩阵在任何域上是否相似, 如果是复数域, 若当标准型不好算时判断的速度将不如这节的快 (事实上, 这样也是常用的计算 Jordan 标准型的一个快速方法, 这可比按上节的定义愣算来的, 不知道高到哪里去了); 如果考虑实数域上的矩阵, 那么将会有一个很好的性质: 如果两个实矩阵相似, 当且仅当将它们视为复矩阵时二者相似. 这一性质的证明是平凡的, 只需设出 $P = P_1 + iP_2$ 后, 考虑 $P_1 + tP_2$ 中必然有一个 t, 使得其可逆.

本节的内容核心就是: 两个矩阵是相似的, 当且仅当它们两个的多项式矩阵相抵. 而本节又恰恰给出了多项式矩阵相抵与否的一系列充要条件.

对 n 阶 λ 方阵 $A(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$, 如果存在 n 阶 λ 方阵 $B(\lambda) \in (\mathbb{F}[\lambda])^{n\times n}$, 使得

$$A(\lambda)B(\lambda) = I_{(n)} = B(\lambda)A(\lambda)$$

其中 $I_{(n)}$ 是 n 阶单位方阵, 则 λ 方阵 $A(\lambda)$ 称为可逆的; 而 $B(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的逆方阵, 并记为 $A(\lambda)^{-1}$. n 阶 λ 方阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是, λ 方阵 $A(\lambda)$ 的行列式是数域 $\mathbb{F}$ 中非零的数. 证明设 n 阶 λ 方阵 $A(\lambda)$ 可逆, 则存在 n 阶 λ 方阵 $B(\lambda)$, 使得 $A(\lambda)B(\lambda) = I_{(n)} = B(\lambda)A(\lambda)$. 两端取行列式, 即得到 $\det A(\lambda) \cdot \det B(\lambda) = 1$. 其中 $\det A(\lambda)$ 与 $\det B(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上关于 λ 的多项式. 比较两端多项式的系数可知, $\det A(\lambda)$ 与 $\det B(\lambda)$ 是零次多项式. 因此 $\det A(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中非零的数. 反之, 设 $\det A(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 中非零的数. 记 $\det A(\lambda) = a.\lambda$ 方阵 $A(\lambda)$ 的附属方阵记为 $A^*(\lambda)$. 由于方阵 $A^*(\lambda)$ 中的元素是 λ 方阵 $A(\lambda)$ 的 $n-1$ 阶子式, 而 $A(\lambda)$ 的 $n-1$ 阶子式是数域 $\mathbb{F}$ 上关于 λ 的多项式, 因此 $A^*(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶 λ 方阵. 所以 $a^{-1}A^*(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶 λ 方阵, 并且

$$A(\lambda)\left(a^{-1}A^*(\lambda)\right) = I_{(n)} = \left(a^{-1}A^*(\lambda)\right)A(\lambda)$$

即 λ 方阵 $A(\lambda)$ 可逆, 而且 $A(\lambda) = a^{-1}A^*(\lambda)$. 如果 λ 方阵 $A(\lambda)$ 可逆, 则 $A(\lambda)$ 是满秩的. 反之则不然. 这可通常方阵是不同的.

对 λ 矩阵, 同样有所谓行或列的初等变换. 对调 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的某两行 (或列); λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的某一行 (或列) 遍乘数域 $\mathbb{F}$ 上某个非零多项式并加到 $A(\lambda)$ 的某一行 (或列) ; 以及 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的某一行 (或列) 遍乘以数域 $\mathbb{F}$ 中非零的数, 依次称为对 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 施行行 (或列) 的第一、第二和第三种初等 λ 变换. 记

$$P_{ij} = I_{(n)} + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

$$Q_{ij}(f(\lambda)) = I_{(n)} + f(\lambda)E_{ij}$$

$$P_i(a) = I_{(n)} + (a-1)E_{ii}$$

其中 E_{ij} 是仅在 (i,j) 位置上元素为 1 而其它元素为 0 的 n 阶方阵 ; $f(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上关于 λ 的多项式. $P_{ij}, Q_{ij}(f(\lambda))$ 和 $P_i(a)$ 依次称为第一、第二和第三种初等 λ 方阵. 分别用第一、第二和第三种初等 λ 方阵左

乘 $n\times m$ 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$, 相当于分别对 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 施行第一、第二和第三种行的初等 λ 变换. 而右乘于 $n\times m$ 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$, 则相当于 $A(\lambda)$ 的列变换.

设 $m\times n$ 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 $\operatorname{rank} A(\lambda)=r$. 则 $A(\lambda)$ 可以经过有限次行或列的初等 λ 变换化为以下形式:

$$B(\lambda)=\left(\begin{array}{cc} D(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

其中 $D(\lambda)=\operatorname{diag}\left(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)\right)$ 是 n 阶对角 λ 方阵, $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上首一多项式, 并且依次一个整除另一个. 这些 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_k(\lambda)$ 是不变因子, 它们是相抵不变量, 而且它们一样, 当且仅当相抵.

设 $A(\lambda)\in(\mathbb{F}[\lambda])^{m\times n}.A(\lambda)$ 中所有 k 阶非零子式的最大公因子称为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子, 记为 $D_k(\lambda)$. 如果 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式全为零, 则约定 $D_k(\lambda)=0$. 容易看出, 如果 $\operatorname{rank}\ A(\lambda)=r$, 则 $D_{r+1}(\lambda)=\cdots=D_s(\lambda)=0$, 其中 $s=\min\{m,n\}$, 而且当 $1\leqslant k\leqslant r$ 时, $D_1(\lambda),\ldots,D_r(\lambda)$ 都是非零多项式, 同时依次一个整除一个. $m\times n$ 阶 λ 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 相抵的充分必要条件是, 它们的行列式因子相同. 简单地说, λ 矩阵的行列式因子是 λ 矩阵在相抵下的全系不变量. 设 $A(\lambda)$ 是复数域上 $m\times n$ 阶 λ 矩阵, $\operatorname{rank} A(\lambda)=r$, 且 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \ldots, d_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子. 由于复系数多项式可以分解为一次因子的乘积, 因此可设

$$\begin{gathered}
d_1(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{e_{11}}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{e_{12}}\cdots\left(\lambda-\lambda_t\right)^{e_{1t}} \\
d_2(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{e_{21}}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{e_{22}}\cdots\left(\lambda-\lambda_t\right)^{e_{2t}} \\
d_r(\lambda)=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{e_{r1}}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{e_{r2}}\cdots\left(\lambda-\lambda_t\right)^{e_{rt}}
\end{gathered}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ 是两两不同地复数, e_{ij} 是非负整数 , $i=1,\ldots,r, j=1,\ldots,t$. 由于 $d_i(\lambda)$ 整除 $d_{i+1}(\lambda)$, 所以 $0\leqslant e_{1j}\leqslant e_{2j}\leqslant\cdots\leqslant e_{rj}$. 当 $e_{j\ell}>0$ 时, 因子 $\left(\lambda-\lambda_j\right)^{e_{j\ell}}$ 称为矩阵 $A(\lambda)$ 的属于 λ_j 的初等因子, $A(\lambda)$ 的初等因子的全体称为 $A(\lambda)$ 的初等因子组.

接下来讲如何算 Jordan 标准型.

设 n 阶复方阵 A 的特征方阵 $\lambda I_{(n)}-A$ 的初等因子组为

$$\left\{\begin{array}{llll}
\left(\lambda-\lambda_1\right)^{m_{11}}, & \left(\lambda-\lambda_1\right)^{m_{12}}, & \ldots, & \left(\lambda-\lambda_1\right)^{m_{1k_1}} \\
\left(\lambda-\lambda_2\right)^{m_{21}}, & \left(\lambda-\lambda_2\right)^{m_{22}}, & \ldots, & \left(\lambda-\lambda_2\right)^{m_{2k_2}} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \\
\left(\lambda-\lambda_t\right)^{m_{t1}}, & \left(\lambda-\lambda_t\right)^{m_{t2}}, & \ldots, & \left(\lambda-\lambda_t\right)^{m_{tk_t}}
\end{array}\right.$$

其中 $m_{j1}\geqslant m_{j2}\geqslant\cdots\geqslant m_{jk_j}>0, j=1,2,\ldots,t$; 且 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ 是两两不同地复数. 则复方阵 A 相似于如下的 Jordan 标准形:

$$J=\operatorname{diag}\left(J_{\left(m_{11}\right)}^{\mathrm{T}}\left(\lambda_1\right), \ldots, J_{\left(m_{1k_1}\right)}^{\mathrm{T}}\left(\lambda_1\right), \ldots, J_{\left(m_{t1}\right)}^{\mathrm{T}}\left(\lambda_t\right), \ldots, J_{\left(m_{tk_t}\right)}^{\mathrm{T}}\left(\lambda_t\right)\right)$$

其中对任意 $\ell=1,2,\ldots,k_j, j=1,2,\ldots,t$,

$$J_{\left(m_{j\ell}\right)}^{\mathrm{T}}\left(\lambda_j\right)=\lambda_j I_{\left(m_{j\ell}\right)}+N_{\left(m_{je}\right)}^{\mathrm{T}}$$

本节总共讲了矩阵相似等价于其多项式矩阵 (即特征方阵) 相抵, 又讲了多项式矩阵的相抵标准型和相抵的判断方法, 最后介绍了如何通过初等因子组求 Jordan 标准型. 本次内容很接近具体计算与应用, 为此只有一道例题, 即计算任意给定的佛罗贝尼乌斯矩阵 (即之前提到的"友"矩阵) 的 Jordan 标准型.

第 4 章 欧式空间与二次型

本章的数域 F 总是默认考虑 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

§4.1 欧式空间与内积

为了使实线性空间更像现实世界的三维空间, 有必要在线性空间中增加几何结构, 首先在实线性空间中定义向量之间的内积, 引进距离的概念, 从而赋予实线性空间一种几何结构. 这样的空间即是 Euclid 空间.

设实线性空间 V 上二元实函数 (α,β) 满足下面三个性质:

(1) 对称性: 对任意的 $\alpha,\beta\in V,(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) 正定性: 对任意 $\alpha\in V,\alpha\neq 0,(\alpha,\alpha)>0$;

(3) 双线性: 对任意 $\alpha_1,\alpha_2,\beta\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 有 $(\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2,\beta)=\lambda(\alpha_1,\beta)+\mu(\alpha_2,\beta)$.

则二元实函数 (α,β) 称为实线性空间 V 的一个内积.

对实线性空间 V 而言, 内积 (α,β) 不是唯一的, 只要满足对称性, 恒正性及双线性的二元实函数都是实线性空间 V 的内积. 实线性空间 V 连同一个取定的内积 $(\cdot,\cdot)$ 一起 $(V,(\cdot,\cdot))$ 称为 Euclid 空间, 或欧式空间.

对欧氏空间 V_1,V_2, 如果作为线性空间是不同的, 那么作为欧氏空间也是不同的, 即便作为线性空间相同, 但所取定的内积不同, 则这两个欧氏空间也是不同的. 设 U,V 是欧氏空间, 如果存在实线性空间之间的线性同构 $\sigma:U\to V$ 保持向量的内积不变, 即 $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$, $\forall\alpha,\beta\in U$, 则 σ 称为欧氏空间 U 到 V 的同构映射, 欧氏空间 U, V 称为是同构的.

例题 4.1.1 *考察 $\mathbb{R}^n$. $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 定义 $(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$. 证明: (α,β) 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个内积.*

例题 4.1.2 *证明: $(x,y):=x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2$ 定义了 $\mathbb{R}^2$ 上的一个内积.*

例题 4.1.3 *考察 $\mathbb{R}^{n\times n}$. 定义 $(A,B)=\operatorname{tr}AB^T$. 证明: $(\mathbb{R}^{n\times n},(\cdot,\cdot))$ 是 **Euclid** 空间.*

尝试利用上题的正定性, 证明下题:

例题 4.1.4 *设 A 是 n 阶实方阵, 若 $A^2A^T=AA^TA$, 则 $AA^T=A^TA$.*

提示 令 $C=AA^T-A^TA$, 往证 $\operatorname{tr}CC^T=0$.

给出内积的两条性质: $(\alpha,0)=(0,\beta)=0$; Cauchy-Schwarz 不等式: $\forall\alpha,\beta\in V$, $(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$, 其中等号仅当 α,β 线性相关时成立. 由正定性可以定义向量 α 的长度 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$, 长度为 1 的称为单位向量. 由 Cauchy 不等式知, 可以定义两个非零向量 α,β 的夹角 $\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\in[0,\pi]$. 如 $\langle\alpha,\beta\rangle=\dfrac{\pi}{2}$, 即 $(\alpha,\beta)=0$, 称向量 α 与 β 正交. 有了长度的概念, 就有三角不等式: $\forall\alpha,\beta\in V$, $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$.

例题 4.1.5 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基, $\alpha,\beta\in V$. 求证:

(1) $\alpha=0$ 当且仅当 $(\alpha,\alpha_i)=0$ 对所有 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立.

(2) $\alpha=\beta$ 当且仅当 $(\alpha,\alpha_i)=(\beta,\beta_i)$ 对所有 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立.

例题 4.1.6 证明:

(1) n 维欧氏空间 V 中向量 α 与 β 正交的充分必要条件是 $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$;

(2) (平行四边形法则**)** 设 $\alpha,\beta\in V$, 则 $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2|\alpha|^2+2|\beta|^2$.

下面给出 n 维实线性空间 V 的内积的方阵表示: 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 V 的一组基, $\forall\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\alpha_i\in V$, $(\alpha,\beta)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_iy_j(\alpha_i,\alpha_j)=xGy^T$, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,

$$G=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&(\alpha_1,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_1,\alpha_n)\\(\alpha_2,\alpha_1)&(\alpha_2,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_2,\alpha_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\alpha_n,\alpha_1)&(\alpha_n,\alpha_2)&\cdots&(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}.$$

方阵 G 称为内积 (α,β) 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的 Gram 阵. Gram 阵一定是正定对称方阵.

例题 4.1.7 对 m 维欧氏空间 V 中任意一组向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$, 定义 $G=((\alpha_i,\alpha_j))_{m\times m}$, $\forall 1\leqslant i,j\leqslant m$. 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关当且仅当 $\det G\neq 0$.

下面考虑欧氏空间一组特殊的基——标准正交基. 标准指的是每个基向量都是单位向量, 正交指的是基向量两两正交. 可以证明在任意的 n 维欧氏空间 V 中都存在标准正交基, 并且可以将 V 的任意一组基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 先改造成正交基 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}$, 这个过程称为 Gram-Schmidt 正交化. 再将每个 γ_k 单位化, 即令 $\beta_k=\dfrac{\gamma_k}{|\gamma_k|}$, $k=1,\cdots,n$, 便得到标准正交基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$. Gram-Schmidt 算法为:

$$\gamma_k=\alpha_k-\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(\alpha_k,\gamma_j)}{(\gamma_j,\gamma_j)}\gamma_j,\ \beta_k=\frac{\gamma_k}{|\gamma_k|}.$$

n 维欧氏空间 V 中任意一组两两正交的单位向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$ 都可以扩成 V 的一组标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n\}$.

例题 4.1.8 试求 $\mathbb{R}^4$ 中线性无关的向量组 $\alpha_1=(1,0,1,0),\alpha_2=(0,-1,1,-1),\alpha_3=(1,1,1,1)$ 所生成的子空间的一组标准正交基, 并扩充成 $\mathbb{R}^4$ 的一组标准正交基.

欧氏空间 V 的一个内积在基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 下的 Gram 阵分别为 G_1,G_2, 且 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$, 其中 P 是过渡矩阵, 则 $G_2=P^TG_1P$, 我们称这种关系为相合: 称 A 与 B 相合, 如果存在可逆矩阵 P, 使得 $B=P^TAP$.

例题 4.1.9 设 3 维欧氏空间 V 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的 **Gram** 阵是 $S=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{pmatrix}$, 求 V 的一组标准正交基, 要求表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

提示 相合到单位阵, 得到两组基的过渡阵, 从而确定标准正交基. 通过这个例题, 你应该学会了如何将一个正定矩阵相合标准化到单位阵, 且能够求出过渡矩阵. 不仅如此, 你还得到: 任意正定矩阵可以写成 PP^T 的形式, 其中 P 是可逆矩阵, 且 P 可以做到是一个上三角矩阵.

例题 4.1.10 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基. 对这组基施行 **Gram-Schmidt** 正交化得到的正交

向量组记为 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$. 证明: $|\beta_j|^2=\dfrac{\det G(\alpha_1,\cdots\alpha_j)}{\det G(\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1})}$, $j=1,\cdots,n$, 其中约定零个向量的 **Gram** 阵行列式为 1.

提示 正交化过程的过渡阵是对角元为 1 的上三角方阵.

例题 4.1.11 设 A 是可逆实方阵. 证明: 存在可逆上三角实方阵 T, 使得 $A=PT$ 对某个正交方阵 P 成立.

提示 $S=A^TA$ 是正定对称的, 则与单位阵相合, 过渡阵 T 为上三角的, $P=AT$ 为正交阵.

下面给出 n 维欧氏空间 V 中两组标准正交基的关系.

(1) 两组标准正交基间的过渡阵 P 为正交方阵, 即 $P^TP=PP^T=I_n$.

(2) 若给出一组标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 和一个 n 阶正交方阵 P, 则可以得到另一组标准正交基 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$, 其中 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$.

上面提到的正交方阵是一类重要的方阵, 如果 O 是正交方阵, 那么 $O^{-1}=O^T$ 也是正交方阵; 如果 O_1,O_2 都是正交方阵, 那么乘积 O_1O_2 也是正交方阵. 如果记所有 n 阶实正交方阵的集合为 $O_n(\mathbb{R})$, 那么它是一个群. 由上面所述, 我们可以在 n 维欧氏空间所有标准正交基集合与 $O_n(\mathbb{R})$ 之间建立了一个一一对应. 如果取 $\mathbb{R}^n$ 的内积为标准内积, 那么一个正交阵的行向量和列向量都构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基, 反之亦然.

例题 4.1.12 任意一个 n 阶实矩阵 A 都可以表为一个正交方阵和一个对角元非负的上三角方阵 T 的乘积, 即 $A=OT$. 而且, 当 A 为可逆实方阵时, 这种表法唯一.

提示 存在性: 取 A 的第一列 α_1, 并扩充为标准正交基, 然后用归纳法.

唯一性: $A=OT=O_1T_1$, 往证 $C={O_1}^TO=I_n$. 其中很重要的一个事实是上三角的正交方阵一定是对角阵, 且对角元为 1 或 -1.

例题 4.1.13 设 $\alpha=\beta+\mathrm{i}\gamma$ 是正交方阵 O 属于特征值 λ 的特征向量, 其中 β 与 γ 是实向量. 证明: $|\lambda|=1$, 而且当 $\lambda\notin\mathbb{R}$ 时, 实向量 β 与 γ 正交, 且范数相等.

欧氏空间中向量的正交可以推广到子空间上: 设 U 是欧氏空间 V 的子空间, $\beta\in V$, 如果 $\forall\alpha\in U$, $(\alpha,\beta)=0$, 则称向量 β 和子空间 U 正交. V 中所有与子空间 U 正交的向量集合称为子空间 U 的正交补, 记为 $U^\perp$. 容易验证 $U^\perp$ 是 V 的子空间, 并且 $V=U\oplus U^\perp$. 关于正交补还有几个简单的性质, 大家可以自行验证: $(U^\perp)^\perp=U$, $(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$, $(U\cap W)^\perp=U^\perp+W^\perp$.

在欧氏空间 V 上的实函数如果满足线性性, 称为线性函数. 即: $f(\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{b})=\lambda_1f(\mathbf{a})+\lambda_2f(\mathbf{b})$. 欧氏空间 V 上所有线性函数的集合称为其对偶空间 V^*. 容易验证它是一个实线性空间, 且任意取定向量 $\mathbf{b}\in V$, $f_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 就是其中一个线性函数. 利用欧氏空间 V 的内积, 考虑其到 $V^\star$ 上的线性映射 $\sigma:\mathbf{b}\to f_{\mathbf{b}}$. 事实上这里 σ 诱导了线性空间的同构. 从而若 $\{\mathbf{e}_i\}$ 是 V 的一组基, $\{f_{\mathbf{e}_i}\}$ 就是 V^* 的一组基, 称为原基的对偶基.

设 U,V 为欧式空间, 如果存在线性同构 $\sigma:U\to V$ 满足 $(\sigma(x),\sigma(y))_V=(x,y)_U$, 使得 $\forall x,y\in U$, 则称 σ 为欧式空间 U 与 V 的同构映射, U 与 V 欧式同构.

§4.2 二次型与正定

含有 n 个变量 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的二次齐次多项式函数 $f(x_1,x_2,\ldots x_n)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{ij}x_ix_j$ 称为二次型. 不妨设 $a_{ij}=a_{ji}$, 从而二次型可写成矩阵表示: $f(x)=x^TAx$, 其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 对称. 称 A 为二次型 f 的矩阵, rank 称为二次型 f 的秩.

设 n 维线性空间 V 上的取值在 F 中的二元函数 $f(a,b)$ 称为双线性函数, 如果 $f\in(V\times V)^*=V^*\otimes V^*$.

在 V 的一组基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 下, f 的方阵写作 $A=\begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & \cdots & f(e_1,e_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f(e_n,e_1) & \cdots & f(e_n,e_n)\end{pmatrix}$. 其中, f 对称当仅当 A 对称. 在其上定义加法和数乘: $(f+g)(a,b)=f(a,b)+g(a,b)$, $(\lambda f)(a,b)=\lambda(f(a,b))$. 这样的定义下, $V^*\otimes V^*$ 是 n^2 维线性空间. 因此, 内积是双线性函数, 其矩阵表示就是 Gram 矩阵. 一个双线性函数在不同基下的矩阵表示是相合的. 双线性函数的矩阵表示的秩也称作 f 的秩, 记作 $\operatorname{rank} f$. 一个双线性函数若不满秩, 则称其是退化的.

记 $S(V,V,F)$ 是所有对称双线性函数的集合, $S(n,F)$ 是所有 n 阶对称方阵的集合. 在公用的维数 n 和数域 F 内, $S(V,V,F)$ 与 $S(n,F)$ 可以看作同一个空间.

例题 4.2.1 设 $f\in S(V,V,F)$, 存在 V 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得 $f(a,b)$ 在这组基下的矩阵是如下对角型: $\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_r,0,\cdots,0)$.

提示 对维数归纳, 考虑 e_1 的正交补空间 $W^\perp$, 证明其与 e_1 生成的子空间 W 直和起来是全空间.

上述命题告诉我们: 实对称矩阵可以相合对角化; n 维线性空间 V 上二次型一定能够通过非退化的线性变量替换, 使得替换后的二次型为全平方项. 我们有简单的推论如下: 设 $f\in S(V,V,F)$. 则存在 V 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得 f 在这组基下的阵是对角型: $\operatorname{diag}(I_p,-I_q,\mathbf{0}_{n-p-q})$.

考虑对角型中对角元个数 p,q 的几何意义, 引入正定, 半正定, 负定, 半负定的概念. 由上述定理的语言, 前 p 个向量 $e_1,\cdots,e_p$ 生成子空间 V^+, 中间 q 个向量 $e_{p+1},\cdots,e_{p+q}$ 生成空间 V^-, 剩余的向量生成根基 $V^\perp$. 双线性函数 f 在 V^+ 上的限制是正定的, 在 V^- 上的限制是负定的, 在 $V^\perp$ 的限制是 0. 全空间是这三个空间的直和. 上述直和分解是唯一的, 即如果还存在另一组直和分解 V_1,V_2,V_3, 使得 f 在 V_1 上正定, 在 V_2 上负定, 在 V_3 上是 0, 那么 $V_1=V^+,V_2=V^-,V_3=V^\perp$. 从而, 对于任意一个对称双线性函数 $f(a,b)$, 子空间 $V^+,V^-,V^\perp$ 的维数与分解方式无关, 前两者的维数 p,q 分别定义为 f 的正、负惯性指数. $p-q$ 称为符号差, 记为 $\delta(f)$.

如果把上面的两个定理类比到实对称方阵上, 可以解决实对称方阵的相合下分类的问题. 设 $S\in S(n,\mathbb{R})$, 且 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是一组基. 令 $f(a,b)=xSy^T$ 是对称双线性函数, 其中 x,y 是向量 a,b 在这组基下的坐标, 那么存在另一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得 f 在这组基下方阵为对角型 $\operatorname{diag}(I_p,-I_q,\mathbf{0}_{n-p-q})$. 由于 f 在不同基下阵相合, 则存在 n 阶可逆实方阵 P, 使得 PSP^T 是如上对角型. 从而, 我们可以把正、负惯性指数和符号差的概念应用到实对称方阵上去.

在欧氏空间 V 中, 考虑对称双线性函数 f, V 有一组标准正交基. 定义 f 在这组标准正交基下的矩阵的特征值是 f 的特征值. 这个定义是显然良好的, 如果有两个不同的标准正交基, 则两组基的阵是正交相似的, 享有相同的特征值和对应重数.

例题 4.2.2 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是欧氏空间上对称双线性函数 f 的含重数非零的全部特征值. 那么存在一组标准正交基使得 f 在这组基下的方阵是 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$.

对应的语言也可以移植到二次型上. 我们不再重复说明. 接下来我们复习把二次型化成主轴形式和标准型的方法. 我们希望寻求 V 的一组标准正交基, 使得如果向量 α 在这组基下的坐标是 $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 那么二次型表达为 $Q(\alpha)=\sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是全部特征值. 接下来我们描述具体的求法. 以下改记 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为所有两两不同的特征值:

1. 求出二次型的对称方阵 S 的全部特征值和重数;
2. 对每个 i, 确立 λ_i 的特征子空间 V_i;
3. 求出每个 V_i 中的一组标准正交基 $\{e_1^i,e_2^i,\cdots,e_{l_i}^i\}$. 其中 l_i 是重数;

4. 记 $O=(e_1^1,\cdots,e_{l_1}^1,e_1^2,\cdots,e_{l_2}^2,\cdots,e_{l_r}^r)^T$.

显然, $O\in O_n(\mathbb{R})$, 且 $OSO^T=\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{l_1},\cdots,\lambda_r I_{l_r})$. 设原来二次型表示用的标准正交基是 $(a_1,\cdots,a_n)$, 那么在新基 $(b_1,\cdots,b_n)=(a_1,\cdots,a_n)O^T$ 下, 二次型变成了主轴形式.

下面研究如何求一组基, 使得在这组基下二次型可表示为 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$, 其中 p,q 是对应阵的正负惯性指数. 它的本质是配方法, 一共两步:

1. 如果二次型有非零平方项, 就跳到 2. 否则, 那么任取一个系数不为零的交叉项, 不妨设为 $a_{12}y_1y_2$. 作换元: $x_1=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $x_2=\dfrac{y_1-y_2}{2}$, $x_i=y_i,\forall i\geqslant 3$.

2. 如果已经是标准型了, 就结束. 否则, 就有非零平方项, 不妨设为 $a_{11}y_1^2$. 那么作如下换元可以从二次型中分离出来一个变元: $x_1=\sqrt{|a_{11}|}(y_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}y_j)$, $y_i=x_i,\forall i\geqslant 2$, 其中 a_{1j} 是 y_1y_j 的系数. 把首项分离出去然后对剩下的项, 回到 1.

如上是一个算法性的求法, 算法过程会在至多分离 n 次后停止.

例题 4.2.3 求变量代换, 将二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3+3x_3^2$ 化为标准形.

例题 4.2.4 设 S 和 $S-\alpha^T\alpha$ 是 n 阶的可逆实对称方阵. α 是实的行向量. 证明: $\delta(S)-\delta(S-\alpha^T\alpha)$ 满足: 当 $\alpha S^{-1}\alpha^T$ 大于 1 时为 2, 等于 1 时为 1, 小于 1 时为 0.

提示 方法是证明两个 $n+1$ 阶实对称方阵 $S_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&S-\alpha^T\alpha\end{pmatrix}$ 和 $S_2=\begin{pmatrix}1-\alpha S^{-1}\alpha^T&0\\0&S\end{pmatrix}$ 相合即可.

例题 4.2.5 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $A^2=A$. 证明: $\exists T\in O_n(\mathbb{R})$, 使得 $T^{-1}AT=\operatorname{diag}(I_r,\mathbf{0}_{n-r})$.

§4.3 规范变换与正交变换

本节讨论欧氏空间的几类重要线性变换. 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, 称满足 $(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{A}^*(\beta)),\forall\alpha,\beta\in V$ 的唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的伴随变换. 请同学们自行验证定义是良好的. 容易验证伴随变换有如下性质: $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^*=\mathscr{A}^*+\mathscr{B}^*$, $(\lambda\mathscr{A})^*=\lambda\mathscr{A}^*$, $(\mathscr{A}\mathscr{B})^*=\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$, $(\mathscr{A}^*)^*=\mathscr{A}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

例题 4.3.1 设 β,γ 是 n 维欧氏空间 V 的固定向量. 证明: 由 $\mathscr{A}(\alpha)=(\alpha,\beta)\gamma$ 所定义的变换 $\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换, 其中 $\alpha\in V$. 求 $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$.

若线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基下的方阵是 A, 则 $\mathscr{A}^*$ 在同一组基下的方阵为 A^T. 而且, $\mathscr{A}$ 的不变子空间 U 的正交补 $U^\perp$ 是伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 的不变子空间.

例题 4.3.2 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 可交换, $\mathscr{A}^*$ 与 $\mathscr{A}$ 可交换. 证明: $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}^*$ 也可交换.

提示 取一组标准正交基, $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{A}^*,\mathscr{B}^*$ 在其下矩阵分别为 A,B,A^T,B^T. 只需证明 $AB^T=B^TA$, 令 $C=AB^T-B^TA$, 往证 $\operatorname{tr}CC^T=0$ 即可.

若 $\mathscr{A}$ 与它的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 可交换, 即 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}$, 称 $\mathscr{A}$ 为规范变换. 如果 n 阶实方阵 A 满足与它的转置 A^T 可交换, 即 $AA^T=A^TA$, 称 A 为正规方阵. 关于规范变换有如下等价命题: (1)$\mathscr{A}$ 是规范变换; (2)$\forall\alpha\in V$, $|\mathscr{A}\alpha|=|\mathscr{A}^*\alpha|$; (3)$\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基下的方阵是规范方阵. 规范变换 $\mathscr{A}$ 的像空间的正交补 $(\operatorname{Im}(\mathscr{A}))^\perp=\ker\mathscr{A}$, 但反之不成立. 尝试使用归纳法证明:

例题 4.3.3 证明: 一组两两可交换的规范方阵可以同时正交相似于准对角形.

例题 4.3.4 证明: 若实方阵 A 是准上三角方阵 $\begin{pmatrix}A_1&A_2\\0&A_3\end{pmatrix}$ 或准下三角方阵 $\begin{pmatrix}A_1&0\\A_2&A_3\end{pmatrix}$, 则 A 是规范方阵当

且仅当 $A_2=0$ 且 A_1,A_3 是规范方阵.

设 A 与 B 是 n 阶实方阵, 如果存在 n 阶实正交方阵 O, 使得 $B=O^TAO$, 则称方阵 A 与 B 正交相似. 容易验证, 方阵之间的正交相似关系是等价关系, 所有 n 阶实方阵集合可以划分为正交相似等价类. 那么就会出现两个基本问题: 每个等价类的代表元是什么; 正交相似的全系不变量是什么, 即方阵在正交相似下的标准型问题. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶实规范方阵 A 的全部特征值, 则 A 正交相似于准对角形:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix},\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\right),$$

其中 $\lambda_{2j-1}=a_j+ib_j$, $\lambda_{2j}=a_j-ib_j$, $j=1,\cdots,s$, $a_1,\cdots,a_s$, $b_1,\cdots,b_s$, $\lambda_{2j+1},\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, $b_1\cdots b_s\neq 0$. 规范方阵的特征值是规范方阵在正交相似下的全系不变量, 即 n 维欧氏空间 V 的一个规范变换在一组标准正交基下的矩阵是如上的准对角形.

例题 4.3.5 设 n 阶实规范方阵 A 与 n 阶实方阵 B 可交换, 证明: 方阵 A 与 B^T 可交换.

提示 法一: 令 $C=AB^T-B^TA$, 往证 $\operatorname{tr}(CC^T)=0$. 法二: 利用正交相似标准型.

我们称保持向量范数不变的线性变换称为正交变换, 即若 $\forall\alpha\in V$, $|\mathscr{A}(\alpha)|=|\alpha|$, 则 $\mathscr{A}$ 称为正交变换. 关于正交变换, 有如下等价命题: (1)$\mathscr{A}$ 是正交变换; (2)$\mathscr{A}$ 是保内积的; (3)$\mathscr{A}$ 把标准正交基变为标准正交基; (4)$\mathscr{A}$ 在标准正交基下的矩阵是正交方阵; (5)$\mathscr{A}$ 是正交变换, 且 $\mathscr{A}\mathscr{A}^*=\mathscr{A}^*\mathscr{A}=\mathscr{I}$.

由于正交变换是特殊的规范变换, 所以关于规范变换的结论都可以移到正交变换.

设 n 阶正交方阵 O 的全部特征值是 $e^{i\theta_1},e^{-i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_s},e^{-i\theta_s}$, $1(t$ 重$)$, $-1(n-2s-t$ 重$)$, 其中 $0<\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\cdots\leqslant\theta_s<\pi$, 则方阵 O 正交相似于准对角形:

$$\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s \end{pmatrix},\underbrace{1,\cdots,1}_{t\text{个}},\underbrace{-1,\cdots,-1}_{n-2s-t\text{个}}\right),$$

因而正交方阵的特征值是正交方阵在正交相似下的全系不变量.

例题 4.3.6 设 O 是 n 阶正交方阵, 且 $\operatorname{rank}(O-I_n)=1$. 证明: 方阵 O 正交相似于对角方阵 $\operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1)$.

例题 4.3.7 设 n 阶正交方阵 O 的特征值不等于 -1. 证明: 方阵 I_n+O 可逆, 方阵 $K=(I_n-O)(I_n+O)^{-1}$ 是斜对称方阵, 且 $O=(I_n-K)(I_n+K)^{-1}$.

如果 $\mathscr{A}$ 与它的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 是同一个变换, 即 $\mathscr{A}=\mathscr{A}^*$, 则称 $\mathscr{A}$ 为自伴变换. 关于自伴变换有如下等价命题: (1)$\mathscr{A}$ 是自伴变换; (2)$\forall\alpha,\beta\in V$, $(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{A}(\beta))$; (3)$\mathscr{A}$ 在标准正交基下的方阵是实对称方阵. 由于实对称方阵的特征值都是实数, 所以实对称方阵有如下的正交相似标准型: 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶实对称方阵 A 的全部特征值, 其中 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$. 则方阵 A 正交相似于对角形: $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

例题 4.3.8 设 n 维欧氏空间 V 自伴变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^k=\mathscr{I}$, $k\in\mathbb{N}^*$. 证明: $\mathscr{A}^2=\mathscr{I}$.

例题 4.3.9 设 λ_1 是 n 阶实对称方阵 $S=(s_{ij})$ 的最大特征值. 证明: $\lambda_1\geqslant\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n s_{kl}$.

如果线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}=-\mathscr{A}^*$, 则称 $\mathscr{A}$ 为斜自伴变换. 关于斜自伴变换有如下等价命题: (1)$\mathscr{A}$ 是斜自伴变换; (2)$\forall\alpha,\beta\in V$, 均有 $(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=-(\alpha,\mathscr{A}(\beta))$, 特别地, $(\mathscr{A}(\alpha),\alpha)=0$; (3)$\mathscr{A}$ 在标准正交基下的方阵是斜对称方阵. 由于斜对称方阵的特征值都是 0 和纯虚数, 所以斜对称方阵有如下的正交相似标准型: 设 $\pm ib_1,\cdots,\pm ib_s$ 是 n 阶斜对称方阵 A 的全部非零特征值, 其中 $s\leqslant\dfrac{n}{2}$, 并且 $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_s$, 则方阵 A 正交相似于准对角形: $\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ -b_1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & b_s \\ -b_s & 0 \end{pmatrix},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-2s\text{个}}\right)$.

例题 4.3.10 设 $\mathscr{A}$ 是二维欧氏空间 V 的斜自伴变换. 证明: $\forall\alpha,\beta\in V$, 均有 $(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=\det\mathscr{A}(\alpha,\beta)$.

例题 4.3.11 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的斜对称变换. 证明: $\mathscr{A}-\mathscr{I}$ 与 $\mathscr{A}+\mathscr{I}$ 可逆, $\mathscr{B}=(\mathscr{A}+\mathscr{I})(\mathscr{A}-\mathscr{I})^{-1}$ 是正交变换.

提示 由斜对称方阵的正交相似标准型得到可逆, $\forall\alpha\in V$, 往证 $(\mathscr{B}(\alpha),\mathscr{B})(\alpha)=(\alpha,\alpha)$, 注意 $(\mathscr{A}(\alpha),\alpha)=0$.

关于自伴变换, 还可以分为若干种类型: 如果 $\forall 0\neq\alpha\in V$, 均有 $(\mathscr{A}(\alpha),\alpha)>(\geqslant,<,\leqslant)0$, 则自伴变换 $\mathscr{A}$ 称为是正定的 (半正定, 负定, 半负定的). 类似地, 对 n 阶实对称方阵 S 也有相仿定义: 如果 $\forall 0\neq x\in\mathbb{R}^n$, 均有 $xSx^T>(\geqslant,<,\leqslant)0$, 则对称方阵 S 称为正定的 (半正定, 负定, 半负定的). 为方便起见, 记为 $S>(\geqslant,<,\leqslant)0$. 如果自伴变换 $\mathscr{A}$ 在一组标准正交基下的矩阵为 A, 则 $\mathscr{A}$(半) 正定当且仅当对称方阵 A(半) 正定.

关于 n 阶正定对称方阵 S, 有以下等价命题: (1) 方阵 S 是正定的; (2) 方阵 S 的每个特征值都是正的; (3) 存在正定对称方阵 S_1, 使得 $S={S_1}^2$; (4) 存在可逆方阵 P, 使得 $S=PP^T$; (5) 方阵 S 的每个主子式都是正的; (6) 方阵 S 的顺序主子是都是正的; (7) 对每个 k, 方阵 S 的所有 k 阶主子式之和都是正的, $k=1,\cdots,n$.

关于 n 阶半正定方阵 S, 也有如下等价命题: (1) 方阵 S 是半正定的; (2) 方阵的所有特征值都是非负的; (3) 存在 n 阶半正定对称方阵 S_1, $\operatorname{rank}S_1=\operatorname{rank}S$, 使得 $S={S_1}^2$; (4) 存在 n 阶方阵 P, $\operatorname{rank}P=\operatorname{rank}S$, 使得 $S=P^TP$; (5) 方阵 S 的所有主子式都是非负的; (6) 方阵 S 的所有 k 阶主子式之和都是非负的, $k=1,\cdots,n$.

例题 4.3.12 设 n 阶对称方阵 S 的前 $n-1$ 个顺序主子式 $S\begin{pmatrix}1&2&\dots&k\\1&2&\dots&k\end{pmatrix}>0$, $k=1,\cdots,n-1$, 且 $\det S\geqslant 0$. 证明: $S\geqslant 0$.

例题 4.3.13 设 A 与 B 是 n 阶实对称方阵, 且 $A>0$. 证明: 方阵 A 和 B 可以同时相合于对角形.

提示 首先 A 相合于单位阵, 即 $PAP_T=I$, PBP_T 还是对称阵可以正交相似到对角形.

例题 4.3.14 A 与 B 都是 n 阶正定对称方阵, 证明: AB 是正定对称方阵的充分必要条件是 $[A,B]=0$.

提示 必要性显然. 充分性往证 A,B 可同时正交相似到对角形.

例题 4.3.15 两个 n 阶半正定方阵可以同时相合于对角形.

例题 4.3.16 A,B 都是 n 阶半正定方阵, 证明: $\det(A+B)\geqslant\det A+\det B$.

我们能够证明上述等价命题 (3) 中的半正定方阵 S_1 是唯一的. 于是, 对于半正定对称方阵 S, 可以定义它的平方根, 即使得 $S={S_1}^2$ 的唯一半正定对称方阵 S_1 称为方阵 S 的平方根, 记为 $S^{\frac{1}{2}}$ 或 $\sqrt{S}$.

之前给出了几种特殊方阵的正交相似标准型, 下面给出一般实矩阵的正交相似标准型: 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶实方阵 A 的全部特征值, 则 A 正交相似于准上三角形:

$$\begin{pmatrix}A_1&*&*&*&*&*\\&\ddots&*&*&*&*\\&&A_s&*&*&*\\&&&\lambda_{2s+1}&*&*\\&&&&\ddots&*\\&&&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 A_j 是 2 阶方阵, 特征值为 $\lambda_{2j-1}=a_j+\mathrm{i}b_j$ 和 $\lambda_{2j}=a_j-\mathrm{i}b_j$, $j=1,\cdots,s$, $a_1,\cdots,a_s,b_1,\cdots,b_s,\lambda_{2s+1},\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, 且 $b_1\cdots b_s\neq 0$.

例题 4.3.17 (Schur 定理) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的全部特征值, 则 $\operatorname{tr}AA^T\geqslant\sum\limits_{j=1}^n|\lambda_j|^2$, 等号当且仅当 A 为规范方阵时成立.

上述例题相当于给出了规范方阵的又一等价命题. 尝试利用它证明下述命题:

例题 4.3.18 设 A 与 B 是 n 阶规范方阵, 且 AB 也是规范方阵, 证明: BA 是规范方阵.

§4.4 奇异值分解与酉空间

对应于方阵之间的正交相似关系, $m\times n$ 实矩阵之间存在正交相抵关系, 即如果存在 m 阶与 n 阶实正交方阵 O_1 与 O_2, 使得 $B=O_1AO_2$, 则称实矩阵 A 与 B 正交相抵. 同样地, 正交相抵关系也是等价关系, 所有 $m\times n$ 矩阵集合在正交相抵下分类的两个基本问题是: 正交相抵下的标准型; 正交相抵下的全系不变量.

首先引入奇异值的定义: 设 A 是 $m\times n$ 实矩阵, 则 n 阶方阵 A^TA(或 AA^T) 的非零特征值的算术平方根称为矩阵 A 的奇异值. 设 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 是 $m\times n$ 实矩阵 A 的所有奇异值, 其中 $\mu_1\geqslant\cdots\mu_r>0$, 且 $r=\operatorname{rank}A$. 则矩阵 A 正交相抵于如下的准对角形: $\operatorname{diag}(\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_r),\mathbf{0})$, 其中 $\mathbf{0}$ 是 $(m-r)\times(n-r)$ 零矩阵. 矩阵的奇异值是矩阵在正交相抵下的全系不变量.

将矩阵 A 表为 $A=O_1\operatorname{diag}(\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_r),\mathbf{0})O_2$, 其中 O_1 与 O_2 是 m 阶与 n 阶正交方阵, 称为矩阵 A 的奇异值分解. 矩阵的奇异值分解具有非常重要的应用, 比如极分解: 任意 n 阶实方阵 A 都可以分解为一个半正定对称方阵 S(或 S_1) 与一个实正交方阵 O 的乘积, 即 $A=SO$(或 $A=OS_1$), 而且其中半正定方阵是由 A 唯一决定的, 并且当 A 可逆时, 正交方阵 O 唯一, A 不可逆时, 正交方阵 O 不唯一.

例题 4.4.1 设 A 与 B 分别是 $m\times n$ 与 $n\times p$ 实矩阵. 证明: $\operatorname{tr}(AB)(AB)^T\leqslant\operatorname{tr}(AA^T)\lambda_1(BB^T)$, 其中 $\lambda_1(BB^T)$ 表示方阵 BB^T 的最大特征值.

例题 4.4.2 证明: n 阶实方阵 A 规范的充分必要条件是方阵 A 具有极分解 $A=SO=OS$, 其中 $S\geqslant 0$, O 为正交方阵.

我们把相关理论推广到复线性空间 $\mathbb{C}^n$ 上: 定义共轭双线性函数 $f(a,b)$, 满足 $f(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b)=\lambda_1f(a_1,b)+\lambda_2f(a_2,b)$, $f(a,\mu_1b_1+\mu_2b_2)=\overline{\mu}_1f(a,b_1)+\overline{\mu}_2f(a,b_2)$. 给定一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 定义阵 $A=(f(e_i,e_j))_{n\times n}$ 为 f 在这组基下的方阵. 任意向量 a,b, 在空间这组基下的坐标为行向量 x,y, 那么 $f(a,b)=xAy^H$.

设 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 如果存在 n 阶可逆复方阵 P, 使得 $B=P^HAP$, 称这两个阵是复相合的. 如果共轭双线性函数 f 满足 $f(a,b)=\overline{f(b,a)}$, $\forall a,b\in\mathbb{C}^n$, 则称 f 是 Hermite 的. 若共轭双线性函数 f 在两组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 和 $\{f_1,\cdots,f_n\}$ 下的阵是 A 和 B, 且 $(e_1,\cdots,e_n)=(f_1,\cdots,f_n)\overline{P}$, 那么 $B=P^HAP$. 显然, 共轭双线性函数 f 是 Hermite 的, 当且仅当 $A^H=A$. 易知, 如果共轭双线性函数 f 是 Hermite 的, 那么存在 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得在这组基下 f 的阵为对角型 $\operatorname{diag}(I_p,-I_q,\mathbf{0}_{n-p-q})$. 从而在 Hermite 共轭双线性函数上也可定义正、负惯性系数和符号差的概念, 也有正、负定空间的直和分解. 正、负惯性系数和符号差是复相合下的全系不变量. 若 f 是 Hermite 双线性函数, 称 $H(a):=f(a,a)$ 为 Hermite 型. 类似地, 能够研究正定性、标准型和主轴形式.

有了上述铺垫, 我们容易知道, 只要将实线性空间中的内积的对称性, 改为共轭对称性, 第二个位置的线性改为共轭线性, 即可得到复线性空间上的内积, 配备这样内积的复线性空间被称作酉空间. 类似的结论均不再赘述, 大家可以参考相关教辅, 它们都是与实的情况类似的.

第 5 章　空间解析几何

§5.1　平面与直线

空间中任意一点 O 和一组基 e_1, e_2, e_3 合在一起成为仿射坐标系, O 为坐标原点, e_1, e_2, e_3 称为坐标向量, 所在直线分别成为 x 轴、y 轴、z 轴, 统称为坐标轴. 坐标轴两个决定了一个平面, 称为坐标面. 引入仿射坐标系后, 空间点、空间向量、$\mathbb{R}$ 的三元组存在一一对应的关系: 空间中的点 $P \leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP} \leftrightarrow$ 坐标 (x_1, x_2, x_3).

例题 5.1.1 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 点 P 将 $\overrightarrow{AB}$ 分割为定比 λ. 证明: $P(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda})$.

例题 5.1.2 用坐标法证明, 四面体对棱中点的连线交于一点.

特别地, 三个坐标向量两两垂直, 用 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 表示, 计算模和夹角更容易. 设 $[O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}]$ 为空间直角坐标系, 向量 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, 则: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. 向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ 与坐标向量的夹角为 α, β, γ, 则 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为方向余弦: $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\dfrac{a_1}{|a|}, \dfrac{a_2}{|a|}, \dfrac{a_3}{|a|})$. 设同一仿射标架下 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的充分必要条件为 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$.

设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 它们的夹角为 θ, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$; $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$; $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$.

例题 5.1.3 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面的充要条件是: $\begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix} = 0$.

下面研究向量积的性质: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ 在几何上表示以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. 值得注意的是, 向量积满足反交换律、分配律, 但是不满足结合律, 二重向量积, 而满足如下等式: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$.

定义混合积 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. 它在几何上表示 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 轮换变换保持混合积不变; 两两交换, 混合积值变为相反数. 我们有 Lagrange 恒等式: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}$.

例题 5.1.4 推导四点共面的充要条件.

我们有如下向量关系的等价条件: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$; $\mathbf{a}//\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} =$

$\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$; $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 共面 $\Leftrightarrow (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

例题 5.1.5 证明: $[\mathbf{v_1}\times(\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2})]\times[\mathbf{v_2}\times(\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2})]=|\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2}|^2(\mathbf{v_1}\times\mathbf{v_2})$.

平面的方程有如下形式: 点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$; 一般式 $Ax+By+Cz+D=0$; 截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; 参数式 $\begin{cases} x=x_0+sl_1+tl_2 \\ y=y_0+sm_1+tm_2 \\ z=z_0+sn_1+tn_2 \end{cases}$; 三点式: 过三点 M_0,M_1,M_2, 则 $\overrightarrow{M_0M}\cdot(\overrightarrow{M_0M_1}\times\overrightarrow{M_0M_2})=0$.

直线的方程有如下形式: 点向式 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$; 一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$; 参数式 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$.

总结平面位置关系: 设 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. π_1 与 π_2 平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$; π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$; π_1 与 π_2 垂直 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$; 夹角 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

总结直线位置关系: 设 $L_1: \dfrac{x-x_0}{l_1}=\dfrac{y-y_0}{m_1}=\dfrac{z-z_0}{n_1}$, $L_2: \dfrac{x-x_0}{l_2}=\dfrac{y-y_0}{m_2}=\dfrac{z-z_0}{n_2}$. L_1,L_2 共面 (相交/平行)$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$; L_1,L_2 异面时, 夹角 ϕ 满足 $\cos\phi=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$, 距离 $d=\dfrac{|(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2}$.

例题 5.1.6 设直线 l 经过 $(3,7,-8)$, 并且与直线 $l_1: x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{-z}{3}$ 以及直线 $l_2: \dfrac{x-1}{2}=y+2=z-3$ 均有交点, 求 l 与 l_1 的交点以及 l 与 l_2 的交点.

提示 参考答案: $l\cap l_1=\{(1,2,-3)\}$, $l\cap l_2=\{(-1,-3,2)\}$.

研究直线和平面位置关系: 设直线 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, 平面 $Ax+By+Cz+D=0$, 则直线方向向量 $\mathbf{v}=(l,m,n)$, 平面法向量 $\mathbf{n}=(A,B,C)$. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\neq0$ 时, 直线与平面相交; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ 且 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 不在平面上时, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$ 直线与平面平行; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ 且 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在平面上时, 直线在平面内.

例题 5.1.7 求经过直线 $x=y=2-z$ 且与平面 $x+2y+3z=5$ 垂直的平面方程式.

提示 参考答案: $5x-4y+z=2$.

例题 5.1.8 求经过点 $M_0(1,-2,0)$ 且经过两平面 $2x-y+z-3=0$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的交线的平面方程.

提示 参考答案: $5x+z=5$.

例题 5.1.9 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 都不在平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 上, 且 $M_1\neq M_2$. 证明: M_1 与 M_2 在平面 π 的同侧, 当且仅当 $F_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ 与 $F_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D$ 同号.

例题 5.1.10 在直角坐标系中, 求下列平面的方程:

(1) 经过直线 l_1, 且平行于直线 l_2, 其中 l_1,l_2 的方程分别是 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

(2) 经过直线 l_1: $\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0, \end{cases}$ 且在 y 轴和 z 轴上有相同的非零截距.

(3) 与平面 π_1: $6x-2y+3z+15=0$ 平行, 且这两个平面与点 $(0,-2,-1)$ 等距;

(4) 经过点 $(2,0,3)$, 且垂直于两平面 π_1: $x-2y+4z-7=0$ 和 π_2: $3x+5y-2z+1=0$.

提示 参考答案: **(1)** $x-2y=1$; **(2)** $7x-2y-2z=-1$; **(3)** $6x-2y+3z=17$; **(4)** $16x-14y-11z=-1$.

例题 5.1.11 在直角坐标系中, 求下列直线的方程:

(1) 平行于向量 $(8,7,1)$, 且与直线 l_1: $\dfrac{x+13}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$, l_2: $\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$ 均相交.

(2) 经过点 $(2,-1,3)$, 与直线 l_1: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z-2}{2}$ 相交且垂直 **(**简称正交**)**.

(3) 经过点 $(4,2,-3)$, 平行于平面 $x+y+z-10=0$, 且与直线 l_1: $\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0 \end{cases}$ 垂直.

提示 参考答案: **(1)** $\dfrac{x-4}{8}=\dfrac{y+2}{7}=z+11$; **(2)** $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-3}{3}$; **(3)** $\dfrac{x-4}{-13}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+3}{8}$.

例题 5.1.12 求过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 与平面 $\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0$, $i=1,2$ 都平行的直线的方程.

例题 5.1.13 求点 $(1,0,2)$ 到直线 $\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0 \end{cases}$ 的距离.

例题 5.1.14 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$ 与 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$ 的公垂线的方程.

例题 5.1.15 求直线 $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+4}{2}$ 与 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$ 所成的角.

例题 5.1.16 在给定的直角坐标系中, 点 P 不在坐标平面上, 从点 P 到 Ozx 平面, Oxy 平面分别作垂线, 垂足为 M 和 N. 设直线 OP 与平面 OMN, Oxy, Oyz, Ozx 所成的角分别为 $\theta,\alpha,\beta,\gamma$, 证明: $\csc^2\theta=\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma$.

§5.2 二次曲面分类

空间曲线通常有两种方程表示: 参数方程 $p(t)=(x(t),y(t),z(t))$, t 为参数; 一般方程 $\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$. 对于空间曲面也类似: 参数方程 $p(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$, t 为参数; 一般方程 $f(x,y,z)=0$.

由空间中的一条曲线 Γ 绕着一条直线 l 旋转而产生的曲面叫做旋转面, Γ 叫旋转的母线, l 叫作旋转面的转轴. 母线 Γ 上每个点 M_0 绕 l 旋转得到的圆称为纬圆, 纬圆与轴垂直, 过 l 的半平面与旋转面的交线称为经线, 经线可以作为母线, 但母线不一定是经线. 已知轴 l 过点 $M(x_1,y_1,z_1)$, 方向向量 $\mathbf{v}=(l,m,n)$, $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$. 设 $M(x,y,z)$ 落在旋转面上, 它必定落在过母线 Γ 上某一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的纬圆上, 因此 M 和 M_0 到 l 上的距离相等, 且 $\overrightarrow{M_0M}\perp l$. 故 $F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0$, $|\overrightarrow{MM_1}\times\mathbf{v}|=|\overrightarrow{M_0M_1}\times\mathbf{v}|$, $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$. 在方程组中消去参数 x_0,y_0,z_0, 即可得到旋转面方程. 特别地, 设 $L: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$, 当它绕 x 轴旋转时, 构成旋转曲面 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$.

例题 5.2.1 $(x-a)^2+z^2=r^2, y=0$ 绕 z 轴旋转而成的环面方程为 $(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$.

例题 5.2.2 $\dfrac{1-x}{3}=y+1=\dfrac{3-z}{2}$ 在 $x-y+z=2$ 上的投影为 l_1，求 l 绕 l_1 旋转所得的曲面方程.

由一族平行直线形成的曲面称为柱面, 这些直线叫做柱面的母线, 柱面上与每条母线都相交的一条曲线, 柱面上与每条母线都相交的一条曲线叫做柱面的一条准线. 按照定义, 平面也是柱面的一种. 设母线方向为 $\mathbf{v}=(l,m,n)$, 准线方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 点 $M(x,y,z)$ 落在柱面上, 那么它必定落在某条母线上, 设母线与准线的一个交点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 有: $F(x_0,y_0,z_0)=G(x_0,y_0,z_0)=0$, $x=x_0+lu$, $y=y_0+mu$, $z=z_0+nu$. 消去 x_0,y_0,z_0, 有: $\begin{cases}F(x-lu,y-mu,z-nu)=0\\G(x-lu,y-mu,z-nu)=0\end{cases}$, 再消去参数 u 即可得到柱面方程. 如果准线给出的是参数方程 $\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\\z=h(t)\end{cases}$, 同理可得柱面的参数方程: $\begin{cases}x=f(t)+lu\\y=g(t)+mu\\z=h(t)+nu\end{cases}$.

例题 5.2.3 若一个曲面是母线平行于 z 轴的柱面，当且仅当它的方程中不含 z.

由一族经过定点的直线形成的曲面叫锥面, 这些直线叫作锥面的母线, 定点叫作锥面的顶点, 锥面上每条母线都相交但不经过顶点的一条曲线叫作锥面的一条准线. 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是锥顶, 准线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 点 $M(x,y,z)$ 在锥面上当且仅当 M 在一条母线上, 即存在准线上一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, 使得 M_1 在直线 M_0M 上, 因此 $\begin{cases}F(x_0+(x-x_0)u,y_0+(y-y_0)u,z_0+(z-z_0)u)=0\\G(x_0+(x-x_0)u,y_0+(y-y_0)u,z_0+(z-z_0)u)=0\end{cases}$.

例题 5.2.4 $F(x,y,z)=0$ 是以原点为顶点的锥面，当且仅当 F 是齐次函数.

例题 5.2.5 证明：以三根坐标轴为母线的圆锥面方程为 $xy+yz+zx=0$.

下面介绍所有非退化二次曲面的分类:

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 三项正.
- 单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 两正一负.
- 双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 两负一正.
- 二次锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.
- 椭圆抛物面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$.
- 双曲抛物面 (马鞍面) $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.

称曲面 S 称为直纹面, 如果存在一族直线, 使得其中每一条直线全在 S 上, 并且 S 上的每个点都在这一族的某一条直线上, 这样一族直线成为一族直母线. 二次柱面和二次锥面、单叶双曲面和双曲抛物面都是直纹面.

例题 5.2.6 马鞍面的性质. 证明:

(1) 马鞍面同族所有直母线都平行于一个平面，并且同族的任意两条直母线异面.

(2) 马鞍面异族的两条直母线必相交.

例题 5.2.7 单叶双曲面的性质. 证明:

(1) 单叶双曲面同族的任意三条直母线都不平行于同一个平面.

(2) 单叶双曲面同族的两条直母线异面.

(3) 单叶双曲面异族的两条直母线共面.

(4) 单叶双曲面的每条直母线都与腰椭圆相交.

考察空间曲线在坐标面的投影. 设空间曲线 $C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$, 由方程组消去变量 z 得到 $H(x,y)=0$, 此线为平行于 z 轴的投影柱面方程, 所以空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线方程为: $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$.

§5.3 二次曲线与二次曲面

空间坐标变换包括平移和旋转两种, 统称为刚性变换. 坐标系的平移不改变坐标轴方向和长度单位, 只移动原点 $O\to O'$, 旧坐标系 $Oxyz$, 新坐标系 $O'x'y'z'$, 新坐标原点 O' 在 $Oxyz$ 中的坐标为 (a,b,c), P 在新老坐标系中分别为 $(x',y',z')^T$ 和 $(x,y,z)^T$, 则 $(x,y,z)^T=(x,y,z)^T+(a,b,c)^T$. 坐标系的旋转, 不改变原点和长度单位, 只旋转坐标轴方向, 但仍保持三轴相互垂直以及右手系不变. $T=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1&\cos\alpha_2&\cos\alpha_3\\\cos\beta_1&\cos\beta_2&\cos\beta_3\\\cos\gamma_1&\cos\alpha_2&\cos\gamma_3\end{pmatrix}$ 成为基 $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ 的过渡矩阵, 则有: $X=TX'$, $X'=T^TX$.

先研究平面二次曲线方程的化简. 给定平面二次曲线的方程: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$, 为了判别它的曲线类型, 我们先将它化为标准型. 考察方程的二次项: $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=(x,y)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:=(x,y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, 只要找到二阶正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$, 使得 P^TAP 为对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$, 则变换 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 能将交叉项消去, 且保持曲线形状. 代入有: $\cot 2\theta=\dfrac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$. 原方程化为: $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0$, 其中 λ_1,λ_2 是 A 的特征值, 至少有一个非零, 不妨 $\lambda_1\neq0$. 平移: $\widehat{x}=x'+\dfrac{b_1'}{\lambda_1}$, $\widehat{y}=y'+\dfrac{b_2'}{\lambda_2}$, (若 $\lambda_2=0$, 则令 $\widehat{y}=y$), 可以化为标准形式:

1. 椭圆型, $\lambda_1\lambda_2>0$, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{y}^2+\lambda_3=0$;
2. 双曲型, $\lambda_1\lambda_2<0$, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{y}^2+\lambda_3=0$;
3. 抛物型, $\lambda_1\lambda_2=0$, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{b_2}\widehat{y}+\widehat{c}=0$.

类似地讨论二次曲面的化简. 对于二次曲面, 我们也类似处理, 给定二次曲面的方程: $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$, 其中的二次项可写成二次型: $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

设正交矩阵 P 使得 $P^TAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, λ_i 为 A 的特征值, 于是正交变换 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ 将方程所有的交叉项消去, 即原方程化为: $\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c'=0$, 其中 λ_i 不全为 0.

在作坐标轴的平移后, 原方程可以化乘标准形式:

1. 椭球型, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 非零且同号, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{y}^2+\lambda_3\widehat{z}^2=\lambda_4$;
2. 双曲面型, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 非零且异号, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{y}^2+\lambda_3\widehat{z}^2=\lambda_4$;
3. 抛物型, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 中两个非零一个为零, 不妨 $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$, $\lambda_3=0$, $\widehat{b}_3\neq 0$, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{y}^2+2\widehat{b}_3\widehat{z}=0$;
4. 退化二次曲面, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 至少一个为零, 不妨设 $\lambda_1\neq 0,\lambda_3=0$, $\lambda_1\widehat{x}^2+\lambda_2\widehat{y}^2+\widehat{c}=0$.

二次曲面、曲线这部分通常会结合二次型的理论来考察, 不会有太难的题出现, 且题型方法相对固定. 因此, 这部分需要通过多计算、多巩固, 才能做到得心应手.

科大数学的解析几何部分主要集中在填空题前几题, 包括求特殊的直线/平面方程, 点/直线/平面之间的距离/夹角, 有部分考到旋转面相关, 需要我们了解点线面的关系, 熟记公式. 因为是填空题, 所以不仅要做的快, 而且很少有时间反复检查, 还要算的准.

解答题一般至多考一道题, 去年考的是利用坐标变换将二次曲面化为标准方程, 以前有考过旋转面相关内容, 一般不会考到直纹面相关的较难内容.